Øving 5.1 *Utled uttrykket for logartimisk midlere temperaturdifferens ved å sette opp differensielle varmebalanser for de to sidene av varmeveksleren og integrere denne. (Hint: Kombinerer de to ligningen og skriv opp en differensialligning i $T_h - T_c$).*

Løsning. *Betrakt en liten (differensiell) del av varmeveksleren med areal dA. Varme overført er*

$$dQ = (T_h - T_c)U\,dA \tag{5.1}$$

og en differensiell energibalanse på kald og varm side gir

$$F_c c_{Pc}(-dT_c) = dQ \tag{5.2}$$

$$F_h c_{Ph} dT_h = -dQ \tag{5.3}$$

hvor det negative tegnet på venstre side i (7.2) skyldes at vi går "mot strømmen" på kald side (se figuren). Ta (7.2)$\cdot F_h c_{Ph}+$ (7.3)$\cdot F_c c_{PC}$

$$F_h c_{Ph} F_c c_{Pc}(dT_h - dT_c) = (F_h c_{Ph} - F_c c_{PC})\underbrace{(T_h - T_c)U\,dA}_{dQ}$$

$$\Rightarrow \frac{d(T_h - T_c)}{T_h - T_c} = \frac{F_h c_{Ph} - F_c c_{PC}}{F_h c_{Ph} F_c c_{Pc}} U\,dA = -RU\,dA$$

hvor vi har innført

$$R = \frac{F_c c_{Pc} - F_h c_{Ph}}{F_h c_{Ph} F_c c_{Pc}}$$

Vi integrerer under antagelse om konstante varmekapasiteter

$$\ln\frac{(T_h - T_c)_2}{(T_h - T_c)_1} = \ln\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -RUA \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = RUA \tag{5.4}$$

Her er fra energibalansen over hele varmeveksleren

$$F_h \underbrace{c_{Ph}(T_{hi} - T_{hu})}_{h_h(T_{hi}) - h_h(T_{hu})} = F_c \underbrace{c_{Pc}(T_{cu} - T_{ci})}_{h_h(T_{cu}) - h_h(T_{ci})} = Q$$

som gir

$$\frac{Q}{F_h c_{Ph}} = T_{hi} - T_{hu}; \qquad \frac{Q}{F_c c_{Pc}} = T_{cu} - T_{ci}$$

Differensen av disse er

$$\underbrace{Q\left(\frac{1}{F_h c_{Ph}} - \frac{1}{F_c c_{Pc}}\right)}_{R} = \underbrace{(T_{hi} - T_{cu})}_{\Delta T_1} - \underbrace{(T_{hu} - T_{ci})}_{\Delta T_2} \tag{5.5}$$

som gir

$$Q = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{R} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}} UA \tag{5.6}$$