8

Kompresjon og ekspansjon - Akselarbeid W_s

Tillegg til kompendium i Prosessteknikk.
Sigurd Skogestad
04 mars 1998

8.1 Innledning

For å komprimere en gass eller pumpe en væske (øke trykket fra p_1 til $p_2 > p_1$) må vi tilføre mekanisk akselarbeide ($W_s > 0$). Tilsvarende kan en ved å ekspandere en strøm til et lavere trykk ($p_2 < p_1$) i en turbin ta ut mekanisk akselarbeide ($W_s < 0$).

Vi skal se på enkle uttrykk for å beregne W_s. Vi gjør dette ved å beregne det ideelle arbeidet W_s^{rev} som man ville få i en reversibel (friksjonsfri; tapsfri) maskin, og vi innfører en virkningsgrad η for å få det virkelige arbeidet. Typisk ligger virkningsgraden rundt 0.7.

For å beregne virkningsgraden, sammenhengen mellom trykkstigning og turtall etc., ville vi trenge en langt mer detaljert beskrivelse av innmaten i disse kompliserte maskinene, men dette overlater vi til maskiningeniørene.

Notasjon. Vi vil som vanlig bruke liten bokstav for w_s [J/mol] for å angi at det gitte arbeidet er pr. mol (og i enkelte tilfeller pr. kg). Dersom man har en mengde N [mol] blir da arbeidet

$$W_s = N w_s \quad [J] \tag{8.1}$$

Alternativt fås for en kontinuerlig prosess med strømengde F [mol/s] at arbeidet er

$$W_s = F w_s \quad [J/s] \tag{8.2}$$

Energi pr. tidsenhet kalles "effekt" og har enheten J/s=W.

8.2 Kompressor

En kompressor er en enhet som øker trykket til en gass-strøm ved å **tilføre** mekanisk arbeide ($W_s > 0$). Flytskjemasymbolet for en kompressor snevrer seg innover for å vise at gassen tar mindre plass når den er komprimert.

Dersom det ideelle reversible kompresjonsarbeidet er W_s^{id} er det virkelige arbeidet

$$W_s = \frac{W_s^{rev}}{\eta} \tag{8.3}$$

der η er kompressorens virkningsgrad. I en reell kompressor går altså en del av arbeidet, $W_s - W_s^{rev}$, tapt som friksjonsvarme.

Tilsvarende uttrykk gjelder også for en **pumpe** som er en enhet som øker trykket til en væske (mem arbeidet er vanligvis mye mindre her fordi væsken har mye større tetthet enn gass).

8.3 Turbin

En turbin er en enhet som tar ut mekanisk arbeide ($W_s < 0$) ved å ekspandere et fluid fra et høyere til et lavere trykk. Flytskjemasymbolet for en turbin øker utover for å vise at gassen tar større plass når den er ekspandert. I det ideelle reversible tilfellet er en turbin det motsatte av en kompressor, dvs. ved å reversere gassstrømmen kan man ta ut et tilsvarende mekanisk arbeide som det man må tilføre ved kompresjon.

Men i praksis har man også her friksjon, og dersom det ideelle ekspansjonsarbeidet er W_s^{id} så er det virkelige arbeidet man kan ut gitt ved

$$W_s = \eta \cdot W_s^{rev} \tag{8.4}$$

der η er turbinens virkningsgrad. I en reell turbin går altså en del av teoretiske arbeidet, $W_s - W_s^{rev}$ (som er et postivt tall siden W_s^{rev} er mere negativ), tapt som friksjonvarme.

8.4 Reversibelt akselarbeide

Betrakt et fluid (gass eller væske) med trykk p_1 som skal komprimeres eller ekspanderes til et trykk p_2 i en stasjonær åpen prosess. Det ideelle (reversible) akselarbeidet som må tilføres for å komprimere 1 mol gass er gitt ved

$$\boxed{w_s^{rev} = \int_{p_1}^{p_2} v dp} \quad [J/mol] \tag{8.5}$$

der v [m^3/mol] er molvolumet. Merk at v er en funksjon av trykket p, og denne avhengigheten er spesielt viktig for gasser (for væsker kan v vanligvis antas konstant).

For å utlede (8.5) vil vi betrakte en tenkt prosess der vi komprimerer en mengde N [mol] av en gass i en ideell stempelkompressor ("ideell sykkelpumpe"). Merk at selv om utledningen her er for kompresjon vil vi kunne reversere prosessen og utlede det samme uttrykket for ekspansjon.

Vi vil betrakte tre delprosesser

1. Sylinderen (sykkelpumpen) fylles ved konstant trykk p_1 (prosessen skjer adiabatisk og volumet øker fra 0 til V_1).
2. Gassen komprimeres fra p_1 til p_2 ved å dytte in stemplet slik at volumet minker fra V_1 til V_2 (det kan her tenkes at man kjøler under kompresjonen; dette tar vi ikke stilling til her – dette vil kommme frem i sammenhengen mellom p og V som brukes senere).
3. Sylinderen (sykkelpumpen) tømmes for gass ved et konstant trykk p_2 (prosessen skjer adiabatisk og volumet minker fra V_2 til 0).

Vi antar at prosessen skjer reversibelt, dvs. at trykk-volum arbeidet i prosessen er gitt ved

$$(-W) = \int p dV \quad [J]$$

der p er det "indre" trykket (det negative fortegnet skyldes at $\int pdV$ gir *utført* arbeide, mens vi definerer W som *tilført* arbeide). Med denne antagelsen er trykk-volum arbeidet i de tre delprosessene gitt ved

1. Fylling av sylinderen (utført arbeide)

$$(-W_1) = \int_0^{V_1} p_1 dV = p_1 V_1 \tag{8.6}$$

2. Kompresjon (tilført arbeide)

$$(-W_2) = \int_{V_1}^{V_2} p dV = -\int_{V_2}^{V_1} p dV \tag{8.7}$$

Merk her at $V_1 > V_2$ ved kompresjon.

3. Tømming (tilført arbeide)

$$(-W_3) = \int_{V_2}^{0} p_2 dV = -p_2 V_2 \quad \text{(tilført)} \tag{8.8}$$

Det totale mekaniske akselarbeidet (som er et "stempelarbeide" i vår tenkte prosess) er summen av disse tre arbeidene

$$W_s^{rev} = W_1 + W_2 + W_3 = -p_1 V_1 + \int_{V_2}^{V_1} p dV + p_2 V_2 = \int_{p_1}^{p_2} V dp \tag{8.9}$$

Den siste likheten følger av å betrakte arealene i figuren. Arbeidet for å komprimere 1 mol gass blir da som gitt i (8.5).

Selv om utledningen her er gitt for en spesifikk tenkt prosess, så gjelder samme utrykket for enhver reversibel prosess. Merk også at utledningen av W_s^{rev} gjelder for et *stasjonært åpent system* (en kontinuerlig prosess) der innstrømmen er i tilstand 1 og utstrømmen er i tilstand 2 (for en endring fra tilstand 1 til tilstand 2 i et *lukket system* er arbeidet gitt ved W_2 i delprosess 2).

8.5 Pumpearbeide

Et **inkompressibelt** fluid er definert som et fluid der molvolumet v [mol/m^3] er konstant uavhengig av trykk og temperatur. Dette er ekvivalent med at tettheten ρ [kg/m^3] er konstant, se (**??**).

De fleste væsker kan regnes som inkompressible. "Kompresjon" (dvs. trykkøkning) av et inkompressiblet fluid kalles vanligvis **pumping** og det ideelle (reversible) pumpearbeidet er fra (8.5) gitt ved

$$w_s^{rev} = (p_2 - p_1)v \quad [J/mol] \tag{8.10}$$

der v [mol/m^3] er molvolumet. Pumpearbeidet pr. kg væske er tilsvarende

$$w_s^{rev} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} \quad [J/kg] \tag{8.11}$$

For en kontinuerlig prosess med volumnstrøm q [m$^3/s$] er massestrømmen lik $w = \rho q$ [kg/s] og pumpeeffekten blir

$$\boxed{W_s^{rev} = (p_2 - p_1)q} \quad [J/s] \tag{8.12}$$

Det virkelige pumpearbeidet er $W_s = W_s^{rev}/\eta$ hvor η er pumpens virkningsgrad.

Den kan også være interessant å bestemme temperaturstigningen ved pumpungen. Dersom vi antar adiabatisk prosess gir energibalansen

$$wc_P(T_2 - T_1) = W_s \quad [J/s]$$

hvor w [kg/s] her er massestrømmen[1] (!) (og ikke spesifikt arbeide). Temperaturstigningen over pumpen er da

$$T_2 - T_1 = \frac{W_s}{wc_P} = \frac{p_2 - p_1}{\rho c_p \eta} \tag{8.13}$$

[1] Beklageligvis er det ikke til å ungå at samme symbol av og til brukes for flere ting. Merk at w [kg/s] er massestrømmen mens w_s [J/kg eller J/mol] er akselarbeide. Merk videre at vi bruker symbolet u både for å angi hastighet [m/s] og molar indre energi [J/mol].

der c_P [J/kg, K] her er den spesifikke varmekapasiten som er antatt konstant.

Eksempel 8.1 Pumping. *1.5 kg/s vann skal komprimeres fra 2 bar til 80 bar i en pumpe med virkningsgrad 0.65.*

Tettheten av vann er 1000 kg/m^3 *slik at volumstrømmen er* $q = 0.0015$ *m*^{3}*/s. Pumpearbeidet blir*

$$W_s = \frac{q(p_2 - p_1)}{\eta} = \frac{0.0015 \cdot (80 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^5)}{0.65} = 18000\ [J/s] = 18.0 [kW]$$

Spesifikk varmekapasitet for vann er $c_P = 4180$ *[J/kg,K], massestrømmen er* $w = 1.5$ *kg/s og vi finner at temperaturstigningen er*

$$T_2 - T_1 = \frac{W_s}{w c_P} = \frac{18000}{1.5 \cdot 4180} = 2.87 \quad [K]$$

Merk at W_s^{rev} her kun gir arbeidet for å øke trykket på væsken. Hvis pumpen også skal løfte væsken til et høyere nivå (potensiell energi) og/eller øke væskens hastighet (kinetisk energi) så vil disse leddene, som vi her har neglisjert, også måtte inkluderes. Dette er omtalt senere, see kapittel 9.

8.6 Reversibelt akselarbeide for ideell gass

Vi vil i det følgende betrakte en ideell gass der vi har

$$pv = RT \tag{8.14}$$

der v [m^3/mol] er molvolumet. Vi vil bruke (8.5) til å utlede uttrykket for det ideelle arbeidet for to tilfeller; isoterm prosess og adiabatisk prosess.

8.6.1 Isoterm prosess

I dette tilfellet er $T_1 = T_2 = T$. Dette innebærer for kompresjon at vi må kjøle underveis og for ekspansjon at vi må tilføre varme. For en ideell gass er sammenhengen mellom p og v for en isoterm prosess

$$pv = p_1 v_1 = p_2 v_2 = RT = \text{konst} \tag{8.15}$$

dvs. vi får

$$\int v dp = \int \frac{p_1 v_1}{p} dp = p_1 v_1 \ln p$$

og siden $p_1 v_1 = RT_1$ gir (8.5)

$$\boxed{w_s^{rev} = RT_1 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)} \quad [J/mol] \tag{8.16}$$

For en ideell gass er entalpien kun en funksjon av temperaturen, dvs. $h_1 = h_2$ og en energibalanse over enheten ($h_2 - h_1 = w_s + q$ [J/mol]) gir at $q = -w_s$ dvs. at tilført arbeide w_s fjernes som varme.

8.6.2 Adiabatisk prosess

Vi antar ideell gass og antar at

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} \tag{8.17}$$

er konstant. Da gjelder for en adiabatisk prosess at pv^γ er konstant under kompresjonen (se utledning under) og bruk av (8.5) gir (se utledning under)

$$\boxed{w_s^{rev} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \quad [J/mol] \tag{8.18}$$

(MERK at det her er en TRYKKFEIL på side 56 i kompendiet)

Dette uttrykket gjelder for en ideell gass med konstant γ som gjennomgår en **reversibel adiabatisk** (isentropisk) prosess. Her varierer naturligvis temperaturen. Vi har

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \tag{8.19}$$

(igjen er det en TRYKKFEIL i kompendiet på side 56)

Vi kan også skrive arbeidet som

$$\boxed{w_s^{rev} = c_P(T_2 - T_1)} \quad [J/mol] \tag{8.20}$$

Dette følger av en energibalanse over enheten ($h_2 - h_1 = w_s + q$ [J/mol] med $q = 0$) der for en ideell gass med konstant varmekapasitet $h_2 - h_1 = c_P(T_2 - T_1)$ [J/mol]. Merk at innsetting av (8.19) i (8.20) gir (8.18).

8.6.3 Polytropisk prosess

Vi har også et tredje tilfelle nemlig en **polytropisk prosess** der det skjer noe avkjøling (kompresjon) eller noe oppvarming (ekspansjon) men ikke tilstrekkelig til å holde temperaturen konstant. Den polytropiske prosessen bergenes som for en adiabtaisk, men med en polytrop-eksponent n istedetfor γ. Vi har at $1 \leq n \leq \gamma$ der $n = 1$ gjelder for en isoterm prosess og $n = \gamma$ gjelder for en adiabatisk prosess.

8.7 Utledning for adiabatisk prosess

8.7.1 Utledning av pv^γ=konst

For en reversibel adiabatisk (isentropisk) endring av en ideell gass gjelder at pv^γ er konstant. For å utlede dette la oss betrakte hva som skjer innenfor sylinderen under kompresjonen. Dette er et lukket system[2] og energibalansen ($\Delta U = Q + W$ med $W = \int pdV$) gir når vi ser her på 1 mol gass og antar $Q = 0$

$$\Delta u = v_2 - u_1 = -\int_{v_1}^{v_2} pdv \quad [J/mol]$$

dvs. for en liten endring gjelder

$$du = -pdv \tag{8.21}$$

For en ideell gass er $du = c_V dT$ og $p = RT/v$ og vi får

$$c_V dT = -\frac{RT}{V} dV \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_V}\frac{dV}{V}$$

Her er for en ideell gass

$$\frac{R}{c_V} = \frac{c_P - c_V}{c_V} = \frac{c_P}{c_V} - 1 = \gamma - 1 \tag{8.22}$$

Dersom γ antas uavhengig av temperaturen fås ved integrasjon fra tilstand 1 til 2

$$\ln\frac{T_1}{T_2} = -(\gamma - 1)\ln\frac{u_2}{u_1}$$

og siden for en ideell gass

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}\frac{p_1}{p_2}$$

får vi som oppgitt i (8.19) at

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{8.23}$$

Dette kan også skrives som

$$pv^\gamma = p_1 v_1^\gamma = p_2 v_2^\gamma = \text{konst} \tag{8.24}$$

(8.23) og (8.24) gjelder altså for

- ideell gass
- γ (dvs. c_P) uavhengig av temperaturen
- reversibel adiabatisk (isentropisk) prosess

[2] Utledningen av pv^γ = konst. for en reversibel adiabatisk (isentropisk) prosess er her gjort for et lukket system, men vil også gjelde for et åpent system siden entropi er en tilstandsfunksjon.

8.7.2 Utledning av akselarbeidet

Fra (8.24) fås

$$v = v_1 \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad [m^3/mol]$$

som innsatt i uttrykket (8.5) for akselarbeidet gir

$$w_s^{rev} = \int_{p_1}^{p_2} v dp = p_1^{\frac{1}{\gamma}} v_1 \int_{p_1}^{p_2} p^{-\frac{1}{\gamma}} dp = p_1^{\frac{1}{\gamma}} v_1 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Big|_{p_1}^{p_2} \quad [J/mol]$$

der den siste likheten holder fordi $\int a^n = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$. Vi får

$$w_s^{rev} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_1^{\frac{1}{\gamma}} v_1 \left[p_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \underbrace{p_1 v_1}_{RT_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

dvs. vi har utledet (8.18).

Alternativ utledning. Energibalansen (8.20) for den totale kompresjonsprosessen (som er et åpent system) gir $w_s = c_P(T_2 - T_1)$ som kan omformes til

$$w_s = c_P T_1 \left[\frac{T_2}{T_1} - 1 \right]$$

Her er for en ideell gass $c_P - c_V = R$, dvs.

$$c_P = c_P \frac{R}{c_P - c_V} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R$$

og med T_2/T_1 fra (8.23) får vi igjen (8.18).

8.8 Eksempel

Følgende eksempel illusterer teorien gitt over.

Eksempel 8.2 Kompresjon av ideell gass.

Oppgave. *1700 mol/s av en ideell gass med $\gamma = c_P/c_V = 1.38$ ved $p_1 = 20$ bar og 50° C skal komprimeres til $p_2 = 100$ bar. Beregn det ideelle (reversible) kompresjonsarbeidet for*

1. *Ett-trinns adiabatisk kompresjon fra 20 til 100 bar.*
2. *To-trinns adiabatisk kompresjon med mellomtrykk 45 bar uten mellomkjøling. Kompresjonen skjer her først fra 20 bar til 45 bar og deretter fra 45 bar til 100 bar.*

3. *To-trinns adiabatisk kompresjon med mellomtrykk 45 bar og mellomkjøling ned til 50° C. Kompresjonen skjer her først fra 20 bar til 45 bar, detetter kjøles gassen til 50° C f r den komprimeres fra 45 bar til 100 bar.*
4. *Isoterm kompresjon ved 50° C*

I tillegg skal man for tilfelle 1 beregne den virkelige utløpstemperaturen når den adiabatiske virkningsgraden er $\eta = 0.72$.

Løsning. *Det er gitt at $\gamma = c_P/c_V = 1.38$. Av dette følger at $\frac{\gamma-1}{\gamma} = 0.275$ og at $c_P = R\frac{\gamma}{\gamma-1} = 30.2$ J/mol,K.*

1. **Ett-trinns adiabatisk kompresjon fra 20 til 100 bar**. *Temperaturen etter kompresjonen er fra (8.19)*

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 5^{0.275} = 1.558 \tag{8.25}$$

dvs. $T_2 = 323 \cdot 1.558 = 503.1$ K (230° C). Det ideelle (reversible) kompresjonsarbeidet er da fra energibalansen (8.20)

$$W_s^{rev} = Fc_P(T_2 - T_1) = 1700 \cdot 30.2(503 - 323) = 9.25\ [MW]$$

hvor 1 MW = 10^6 J/s. Vi kan sjekke dette ved å beregne arbeidet fra (8.18)

$$W_s^{rev} = F\frac{\gamma}{\gamma-1}RT_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$

$$= 1700 \cdot \frac{1}{0.275} \cdot 8.31 \cdot 323\left[5^{0.275} - 1\right] = 9.25\ [MW]$$

2. **To-trinns adiabatisk kompresjon med mellomtrykk 45 bar uten mellomkjøling.** *Kompresjonen skjer her først fra $p_1 = 20$ bar til $p_3 = 45$ bar og deretter fra $p_3 = 45$ bar til $p_2 = 100$ bar. Svaret blir naturligvis det samme som i tilfelle 1 siden i 1. trinn*

$$\frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

og i 2. trinn

$$\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

som når vi multipliserer sammen gir samme slutt-temperatur som i (8.25), og fra energibalansen må arbeidet være det samme.

3. **To-trinns adiabatisk kompresjon med mellomtrykk $p_3 = 45$ bar og mellomkjøling ned til $T_3' = 50^o$C.**
Temperaturen etter 1. trinn blir

$$\frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{p'}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 2.25^{0.275} = 1.2498$$

og fra energibalansen

$$W_{s1}^{rev} = Fc_P(T_3 - T_1) = Fc_P T_1 \left(\frac{T_3}{T_1} - 1\right) = 4.14\ [MW]$$

Etter 2. trinn

$$\frac{T_2}{T_3'} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 2.22^{0.275} = 1.2456$$

og fra energibalansen

$$W_{s2}^{rev} = Fc_P T_3' \left(\frac{T_2}{T_3'} - 1\right) = 4.07\ [MW]$$

Det totale arbeidet med mellomkjøling er da $4.14 + 4.07 = 8.21$ *MW som er 11% lavere enn for ett-trinns kompresjon.*

4. **Isoterm kompresjon ved 50°C.** *Det isoterme kompresjonsarbeidet er fra (8.16) gitt ved*

$$W_s^{rev} = FRT_1 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 1700 \cdot 8.31 \cdot 323 \cdot \ln 5 = 7.34\ [MW]$$

som er 21% lavere enn for ett-trinns adiabatisk kompresjon. Merk at isoterm kompresjon vil tilsvare grenseverdien for adiabatisk kompresjon med uendelig mange trinn hver med mellomkjøling til 50° C.

La oss til slutt beregne den virkelige utløpstempeturen ved **ett-trinns kompresjon**. *Virkningsgraden er* $\eta = 0.72$ *dvs. det virkelige kompresjonsarbeidet er*

$$W_s = \frac{W_s^{rev}}{\eta} = \frac{9.25}{0.72} = 12.85\ [MW]$$

Den virkelige utløpstemperaturen T_2 *er da fra* $W_s = Fc_P(T_2 - T_1)$ *lik*

$$T_2 = 323 + \frac{12.85 \cdot 10^6}{1700 \cdot 30.2} = 323 + 250.2 = 573.2\ [K]$$

dvs. 300° C, mens den for reversibel (tapsfri) kompresjon var 230° C.

Av eksemplet ser vi at det under kompresjon er optimalt å kjøle så mye som mulig for å redusere kompresjonsarbeidet. Vanligvis gjøres dette med kompresjon i flere trinn med **mellomkjøling** mellom hvert trinn. Det kan vises at for et gitt antall trinn er det optimalt å ha likt kompresjonsforhold i hvert trinn. Ofte er kompresjonsforholdet, p_2/p_1, i området 2 til 3 pr. trinn.

For en turbin gjelder tilsvarende at for å få ut mest mulig arbeide bør en ekspandere ved høyest mulig temperatur. I praksis ekspanderer man i flere trinn med mellomoppvarming.

8.9 Reversibilitet og virkningsgrad

For å illustrere konseptet med virkningsgrad og friksjonsvarme bedre, betrakt en gass som komprimeres fra tilstand 1 (med trykk p_1 og temperatur T_1) til tilstand 2 (med trykk p_2 og temperatur T_2). For en stasjonær kontinuerlig prosess gir energibalansen

$$H_2 - H_1 = Q + W_s \tag{8.26}$$

Her er entalpi en tilstandsfunksjon slik at differensen $H_2 - H_1$ er entydig bestemt. For eksempel er for en ideell gass er entalpien kun en funksjon av temperatur og med konstant varmekapasitet har vi

$$H_2 - H_1 = F c_p (T_2 - T_1) \quad [J/s]$$

der F [mol/s] er mengden som komprimeres.

Varme Q og arbeide W_s er derimot ikke tilstandsfunksjoner. Men det finnes en tenkt reversibel (tapsfri; friksjonsfri) prosess for hvilken det tilførte arbeide er minimalt – dette er arbeidet W_s^{rev}.

I virkeligheten har vi friksjon og vi må tilføre et arbeide W_s som er strørre enn W_s^{rev}. Energibalansen (8.26) sier da at Q må minke tilsvarende. At Q minker betyr at vi kjøler mer, dvs. vi har at friksjonsvarmen $W_s - W_s^{rev}$ må tas ut ved kjøling.

Alternativt dersom Q er gitt, f.eks. for en adiabatisk prosess der $Q = 0$, så vil friksjonsvarmen $W_s - W_s^{rev}$ gå med til å øke entalpien på ustrømmen, dvs. temperaturen T_2 er høyere enn den man ville fått ved en tapsfri prosess.

8.10 Kompresjon og ekspansjon av reelle gasser

Formlene gitt over er for ideelle gasser. For reelle gasser kan det reversible akselarbeidet i prinsippet beregnes fra (8.5),

$$w_s^{rev} = \int_{p_1}^{p_2} v dp \quad [J/mol]$$

Imidlertid er det mer hensiktsmessig å gjøre nytte av entropien. For definisjonen av entropi henvises det til kapittel 9.4 (side 19).

8.10.1 Isoterm prosess

For en isoterm prosess fra tilstand 1 ("innstrøm") til tilstand 2 ("utstrøm") har vi

$$w_s^{rev} = (h_2 - h_1) - T(s_2 - s_1) \quad [J/mol] \tag{8.27}$$

der h_i [J/mol] er entalpien og s_i [J/mol,K] er entropien. Begge disse er tilstandsfunksjoner og beregnes ofte numerisk fra en tilstandsligning eller finnes fra termodynamiske tabeller. Alternativt kan de avleses av termodynamiske diagrammer: Fra en gitt verdi for p_1 og T avleses h_1 og s_1 for innstrømmen til enheten. Man følger så en linje for konstant temperatur til man kommer til p_2, der man kan avlese h_2 og s_2 for utstrømmen.

Utledning. Vi kan utlede (8.27) fra en energibalanse

$$h_2 - h_1 = q + w_s \quad [J/mol]$$

For en reversibel prosess ved konstant temperatur er den tilførte varmen gitt ved (se (9.22))

$$q^{rev} = T(s_2 - s_1) \quad [J/mol] \tag{8.28}$$

og (8.27) følger.

8.10.2 Adiabatisk prosess

For en adiabatisk reversibel prosess er fra (9.22) entropien konstant ("isentropisk prosess"), dvs. $s_1 = s_2$. Akselarbeidet er da fra energibalansen

$$w_s^{rev} = h_2 - h_1 \quad [J/mol] \tag{8.29}$$

Her kan entalpidifferensen leses av termodynamiske diagrammer: Fra en gitt verdi for p_1 og T_1 avleses h_1 for innstrømmen til enheten. Man følger så en linje for konstant entropi til man kommer til p_2, der man kan avlese h_2 (og T_2) for utstrømmen.

9

Mekanisk energibalanse (Bernoilli's ligning)

9.1 Energibalanse med kinetisk og potensiell energi

Vi har tidligere neglisjert leddene for kinetisk og potensiell energi i energibalansen fordi de vanligvis er neglisjerbare i forhold til endringer i indre (termisk) energi. I dette kapitlet skal vi imidlertid konsentrere oss om mekaniske energiformer (trykk-volum energi, potensiell energi og kinetisk energi) og omdanning mellom disse.

For en masse m [kg] er den potensielle energien

$$\mathrm{PE} = mgz \quad [J]$$

der z [m] høyde i forhold til valgt referanseplan og g [m/s^2] er tyngdens akselerasjon. For en masse m er den kinetiske energien

$$\mathrm{KE} = m\alpha\frac{u^2}{2} \quad [J]$$

der u middelhastigheten er definert ved

$$u = \frac{q}{A} \quad [m/s]$$

der q [m^3/s] er volumnstrømmen og A [m^2] er tversvittet (f.eks. tversvittet av et rør). Faktoren α tar hensyn til at middelet av kinetisk energi ikke nødvendigvis er lik $m\frac{u^2}{2}$. For turbulent strøming i rør (det mest vanlige) er $\alpha = 1$, mens for laminær strømning i rør er $\alpha = 2$. (dere vil lære mer om dette i senere fag!)

Med potensiell og kinetisk enegi inkludert blir energibalansen for å prosessering av en masse m [kg] i en stasjonær kontinuerlig prosess:

$$H_{ut} + m\alpha_{ut}\frac{u_{ut}^2}{2} + mgz_{ut} = H_{inn} + m\alpha_{inn}\frac{u_{inn}^2}{2} + mgz_{inn} + Q + W_s \quad [J] \quad (9.1)$$

Ofte erstatter vi "ut" med "2" og "inn" med "1" (det er kun for å forenkle notasjonen og er i orden her siden vi har en stasjonær prosess og derved ingen endring i tilstanden innenfor kontrollvolumnet). Energibalansen skrives da

$$\boxed{H_2 + m\alpha_2 \frac{u_2^2}{2} + mgz_2 = H_1 + m\alpha_1 \frac{u_1^2}{2} + mgz_1 + Q + W_s} \quad [J] \tag{9.2}$$

På massebasis kan dette skrives

$$h_2 + \alpha_2 \frac{u_2^2}{2} + gz_2 = h_1 + \alpha_1 \frac{u_1^2}{2} + gz_1 + q + w_s \quad [J/kg] \tag{9.3}$$

Middelhastigheten er definert som

$$u_1 = \frac{q_1}{A_1}; \quad u_2 = \frac{q_2}{A_2} \quad [m/s] \tag{9.4}$$

Merk videre at fra **massebalansen** er $w_1 = w_2$ [kg/s] hvor $w_1 = \rho_1 q_1$ og $w_2 = \rho_2 q_2$. Ved innføring av hastigheten fra (9.4) blir da massebalansen for en stasjonær prosess (kalles ofte **kontinuitetsligningen**):

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad [kg/s] \tag{9.5}$$

For er inkompressibelt fluid (de fleste væsker) er ρ konstant og massebalansen gir

$$u_1 A_1 = u_2 A_2 \quad [m^3/s] \tag{9.6}$$

Vi ser av denne ligningen at hastigheten vil være entydig bestemt av tverrsnittet.

9.2 Maksimalt akselarbeide

La oss betrakte en stasjonær kontinuerlig prosess der innstrømmen har entalpi H_1, temperatur T_1, trykk p_1, hastighet u_1 og høyde z_1, mens utstrømmen har entalpi H_2, temperatur T_2, trykk p_2, hastighet u_2, høyde z_2. Hva er det maksimale akselarbeidet som kan tas ut (eller ekvivalent hva er det minimale akselarbeidet W_s som må tilføres)?

Vi har allerede utledet at dersom vi neglisjerer kinetisk og potensiell energi så er det maksimale utnyttbare akselarbeidet gitt som

$$W_s^{rev} = \int_{p_1}^{p_2} V dp = m \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} \quad [J]$$

hvor vi har innført $V = m/\rho$ der ρ [kg/m^3] er tettheten. Men i tillegg lar også kinetisk energi og potensiell energi seg overføre til akselarbeide (og omvendt), dvs. for en reversibel prosess har vi

$$W_s^{rev} = m\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{\rho} + m\left(\alpha_2\frac{u_2^2}{2} - \alpha_1\frac{u_1^2}{2}\right) + mg(z_2 - z_1) \quad [J] \tag{9.7}$$

På massebasis kan dette skrives

$$w_s^{rev} = \int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{\rho} + \left(\alpha_2\frac{u_2^2}{2} - \alpha_1\frac{u_1^2}{2}\right) + g(z_2 - z_1) \quad [J/kg] \tag{9.8}$$

I virkeligheten må det tilføres et arbeide $W_s = mw_s$ som er større en dette, og forskjellen

$$F = W_s - W_s^{rev} \quad [J] \tag{9.9}$$

går tapt som **friksjonsvarme**.

9.3 Den mekaniske energibalansen

Ved å skrive (9.9) på formen $W_s^{rev} + F = W_s$ og innføre uttrykket for W_s^{rev} fra (9.7) fås den såkalte "mekaniske energibalansen"

$$\boxed{m\alpha_2\frac{u_2^2}{2} + mgz_2 + m\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{\rho} + F = m\alpha_1\frac{u_1^2}{2} + mgz_1 + W_s} \quad [J] \tag{9.10}$$

Begrepet "mekanisk energibalanse" er egentlig misvisende siden mekanisk energi *ikke* er en konservert størrelse og friksjonsleddet F uttrykker nettopp det uunngåelige tapet av mekanisk energi som vi har i enhver virkelig prosess.

På massebasis kan den mekaniske energibalansen skrives

$$\boxed{\alpha_2\frac{u_2^2}{2} + gz_2 + \int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{\rho} + \frac{\Delta p_f}{\rho} = \alpha_1\frac{u_1^2}{2} + gz_1 + w_s} \quad [J/kg] \tag{9.11}$$

der vi har brukt vanlig konvesjon med å skrive F/m som

$$\frac{F}{m} = \frac{\Delta p_f}{\rho}$$

der Δp_f er et ekvivalent friksjonstrykkfall (vi unngår her bruk av symbolet f i betydning F/m fordi f vanligvis brukes som symbol på friksjonsfaktoren) .

Merk at hastigheten i tillegg må tilfredsstille massebalansen gitt i (9.5).

9.3.1 Bernoilli's ligning

For et **inkompressibelt fluid** (de fleste væsker) er ρ en konstant (og for gasser med lite trykkfall kan ρ antas tilnærmet konstant) og vi kan skrive

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = \frac{p_1 - p_2}{\rho}$$

Hvis vi tillegg ser på et systen der det ikke er noe mekanisk arbeide ($w_s = 0$) kan (9.11) skrives på formen

$$\boxed{\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{u_2^2}{2} + g z_2 + \frac{\Delta p_f}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{u_1^2}{2} + g z_1} \quad [J/kg] \tag{9.12}$$

som er en generalisert versjon av **Bernouilli-ligningen**.

Den "opprinnelige" **Bernouilli-ligningen** ble utledet under antagelse at det ikke var friksjon ($\Delta p_f = 0$), intet mekaniske arbeide ($w_s = 0$), og under antagelse av at man følger en "strømlinje" (slipp en mikroskopisk partikkel og følg dennes bevegelse) Langs strømlnjen er det ikke nødvendig med noen midling av hastigheten, dvs. $\alpha = 1$, og (9.12) gir

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + g z = \text{konst} \tag{9.13}$$

Denne klassiske ligningen utledes enklest fra Newtons 2. lov (som dere vil gjøre senere!) og ble presentert av Daniel Bernoilli i 1738 mer enn hundre år før termodynamikkens 1. lov (energibalansen). En viktig implikasjonen av ovenstående ligning er at trykket synker når hastigheten øker, f.eks. i en innsnevring. Dette kan umiddelbart kan synes overraskende, men hvis man tenker seg trykkfallet som den drivende kraft som får væsken til å akselrere så er det rimelig. Et enkelt eksperiment for å illustrere denne effekten er å blåse luft mellom to papirark. De vil dras mot hverandre pga. det lavere trykket som dannes av strømningen.

Eksempel 9.1 Trykk i innsnevring. *Vann strømmer i et rør med hastighet 1.9 m/s. Røret innsnevres (midlertidig) i en dyse der tverrsnittet er 25%. Beregn hvor mye lavere trykket er i innsnevringen når friksjonstap neglisjeres ("tapsfri strømning").*

Vi antar turbulent strømning slik at $\alpha = 1$. Videre kan endringer i potensiell energi neglisjeres og den generaliserte Bernouilli-ligningen (9.12) gir

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} \tag{9.14}$$

Fra massebalansen (9.6) er

$$u_2 = u_1 \frac{A_1}{A_2} = 1.9 \frac{1}{0.25} = 7.6 \ [m/s]$$

og vi får fra (9.14) at

$$p_2 - p_1 = \rho\left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2}\right) = 1000\left(\frac{7.6^2}{2} - \frac{1.9^2}{2}\right) = 27075 N/m^2 = 0.27 bar$$

I måle dyser og måleblender måler man trykkfallet i innsveringen og bruker dette som en indirekte måling av strømningshasteighet.

9.3.2 Friksjonstrykkfall

For å ha nytte av den mekaniske energibalansen må vi kunne beregne friksjonsleddet. For en kompressor eller pumpe er det ganskje enkelt $F = W_s - W_s^{rev}$ og kan beregnes fra virkningsgraden.

For andre utstyrsenheter finnes friksjonsleddet ofteste ved å bruke (mer eller mindre empiriske) uttrykk for friksjonstrykkfallet Δp_f. For eksempel for strømning i rør med diameter D skrives friksjonstrykkfallet over rørlengden L som

$$\Delta p_f = 4f\frac{L}{D}\rho\frac{u^2}{2} \quad [N/m^2] \tag{9.15}$$

der friksjonsfaktoren f er gitt i figur 9.1 som funksjon av det såkalte Reynoldstallet

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \tag{9.16}$$

der μ [kg/m,s] er viskositeten av fluidet. Merk at det er ulike kurver i figuren avhengig av om vi har laminær ("rettlinjet") eller turbulent ("kaotisk") strømning. I "våre" rør er det vanligvis høye Reynolds-tall og turbulent strømning. En typisk verdi av friksjonsfaktoren er da $f = 0.005$, som gir den tilnærmede ligningen.

$$\Delta p_f = 0.02\frac{L}{D}\rho\frac{u^2}{2} \quad [N/m^2] \tag{9.17}$$

Denne ligningen gjelder friksjonstrykkfall i rette rør. I tillegg har vi friksjonstrykkfall i annen apparatur. Disse trykkfallene skrives ofte på formen

$$\Delta p_f = n\rho\frac{u^2}{2} \quad [N/m^2] \tag{9.18}$$

der faktoren n ("antall hastighetershøyder tapt") typisk er i området 0.5 til 1.5 for hvert rørbend eller for hver store tverrsnittendring. For ventiler er naturligvis n avhengig av åpningen, og kan typisk ligge i området 2 til 20 (fra fullt åpen til 1/4 åpen ventil).

Typiske trykkfall i apparatur ligger i størrelsesorden 0.2 bar for hver "viktige apparaturenhet".

Figure 9.1: Friksjonsfaktoren f

Eksempel 9.2 Trykkfall i varmeveksler. *120 m^3/h sjøvann skal brukes som kjølemedium i en varmeveksler. Vannet går gjennom 62 stk. 6m lange stålrør i parallell, hver med innvendig diameter 18 mm. Tettheten av sjøvannet er 1030 kg/m^3 og viskositeten kan settes til 1.13 cP = 0.00113 kg/m,s. Ved innløpet til rørene er det et et trykkfall tilsvarende 0.5 hastighetshøyder ($n = 0.5$) og ved utløpet et trykkfall tilsvarende $n = 1$. For stålrør kan man regne at overflateruheten er $\epsilon = 0.045$ mm. Beregn trykkfallet gjennom varmeveksleren.*

Løsning. *Midlere hastighet i varmevekslerens rør er*

$$u = \frac{120}{3600 \cdot 62 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0.018^2} = 2.11 \quad [m/s]$$

Summen av trykktapet ved innløpet og utløpet er

$$\Delta p_f = (0.5 + 1)\rho\frac{u^2}{2} = 1.5 \cdot 1030 \cdot \frac{2.11^2}{2} = 3439[N/m^2] = 0.034[bar]$$

Reynoldstallet i rørene er

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{1030 \cdot 2.11 \cdot 0.018}{0.00113} = 34600$$

Relativ ruhet er $\epsilon/D = 0.045/18 = 0.0025$ *og fra figuren for friksjonsfaktoren avleses* $f = 0.0075$. *Trykkfallet i rørene er derved*

$$\Delta p_f = 4f\frac{L}{D}\rho\frac{u^2}{2} = 4 \cdot 0.0075 \cdot \frac{6}{0.018} \cdot 1030 \cdot \frac{2.11^2}{2} = 22928[N/m^2] = 0.229[bar]$$

Det totale (friksjons)trykkfallet gjennom varmeveksleren er da $0.034 + 0.229 = 0.263$ *bar.*

9.4 Friskjon og entropi

Kommentarene under er interessante men det er ikke nødevendig forståelsen av materialet i dette kapitlet.

Friksjonsvarme. Ved å sammenligne den mekaniske energibalansen i (9.10) med energibalansen i (9.2) og bruke (??) sammen med definisjonen av entalpi, ser vi at friksjonstapet kan uttrykkes

$$F = U_2 - U_1 - Q + \int_{V_1}^{V_2} pdV \tag{9.19}$$

For et inkompressibelt fluid (de fleste væsker) er det siste leddet null og vi ser at friksjonsvarmen enten vil overføres til indre energi eller til omgivelsene som varme ($-Q$).

Termodynamikkens 2. lov. En **tilstandsfunksjon** avhenger kun av systemets tilstand (mengde, sammensetning, trykk, temperatur, fasefordeling, hastighet, posisjon). Eksempler på tilstandsfunksjoner er indre energi, entalpi, volum, etc. En **reversibel prosess** er en prosess for hvilken det finnes en komplementær prosess som bringer systemet og omgivelsene tilbake til sin opprinnelige tilstand.

Betrakt en prosess med en gitt innstrøm og en gitt utstrøm. I energibalansen (9.2) er alle ledd tilstandsfunksjoner unntatt Q og W_s. Men dette betyr at summen $Q + W_s$ må være en tilstandsfunksjon, og vi må da ha at $Q + W_s = Q^{rev} + W_s^{rev}$, dvs. vi har

$$F = W_s - W_s^{rev} = Q^{rev} - Q \tag{9.20}$$

Her er for enhver virkelig prosess $F > 0$, som er et uttrykk for **termodynamikkens 2. lov**.

Entropi. Av ovenstående diskusjon fremgår det at Q^{rev} er en tilstandsfunksjon (den reversible grenseverdien kan ikke overskrides) og dette brukes til å definere tilstandsfunksjonen **entropi** S [J/K] som

$$dS \triangleq \frac{1}{T} dQ^{rev} \tag{9.21}$$

hvor "skaleringsfaktoren" T benyttes fordi det har vist seg hensiktsmessig. Denne defisjonen gir

$$Q^{rev} = \int_{S_1}^{S_2} T dS \tag{9.22}$$

Indre energi. For en reversibel prosess er $F = 0$ og differensiering av (9.19) gir $dU = dQ^{rev} - pdV$ som ved innføring av definisjonen av entropi gir følgende totale differensial for indre energi

$$dU = TdS - pdV \tag{9.23}$$

eller

$$U_2 - U_1 = \int_{S_1}^{S_2} TdS - \int_{V_1}^{V^2} pdV \tag{9.24}$$

Disse er her utledet for en reversibel prosess men gjelder generelt siden indre energi er en tilstandsfunksjon.