

Kapittel 11

Prosessdynamikk

I et dynamisk system endrer verdien av variablene seg med tid, og vi skal her kvantifisere det kjente faktum at “ting tar tid”. I kapitlet tar vi for oss dynamisk modellering, dynamiske responser (analyse) og dynamisk simulering (numerisk beregning).

11.1 Innledning

Noen grunner til at vi ønsker å betrakte systemets dynamikk og fremskaffe dynamiske modeller:

1. For å beskrive tidsforløpet av satsvise prosesser.
2. For å beskrive transiente forløp av kontinuerlige prosesser (dynamisk forløp fra en stasjonært tilstand til en annen).
3. For å forstå prosessens dynamikk (analyse), for eksempel som uttrykt ved tidskonstanten for responsen.
4. For å lage “treningssimulator” til bruk for opplæring og trening av operatører
5. Til “hva skjer hvis” studier, for eksempel som et verktøy i en HAZOP-analyse (f.eks. “hva skjer hvis denne ventilen stenges”).
6. Til bruk for optimalisering og regulering (reguleringsstruktur, innstilling av regulatorparametere, modellbasert regulering).

De dynamiske modeller vi betrakter i denne boka er gitt i form av differensialligninger på formen

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u) \quad (11.1)$$

der u er de uavhengige variable og y de avhengige variable sett fra et årsaks-virknings-forhold. Med en dynamisk modell kan man, gitt systemets initiale tilstand (gitt $y(t_0) = y_0$) og gitt verdien av alle de uavhengige variable (gitt $u(t)$ for $t > t_0$), beregne verdien av de avhengige variable som funksjon av tid (beregne $y(t)$ for $t > t_0$).

Den stasjonære modellen $f(y, u) = 0$ gir sammenhengen mellom variablene u og y for spesialtilfellet der vi ikke har noen tidsvariasjon, slik at $dy/dt = 0$ (“systemet er i ro”). De aller fleste modeller vi har studert til nå har vært stasjonære, dvs. tiden t har ikke vært en variabel.

Basisen for en dynamisk modell kan være

1. Fundamental/teoretisk: Fra balanseligninger + fysikk/kjemi; se neste avsnitt
2. Regresjonsbasert/empirisk: Fra eksperimentelle måledata

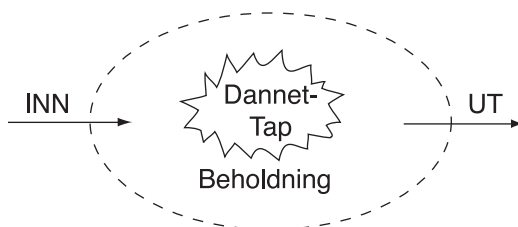
Ofte brukes en kombinasjon der enkelte parametere i den teoretiske modellen fremskaffes fra måledata.

Kommentar om notasjon. Prikknotasjonen \dot{B} brukes andre steder i denne boka for å angi rater (strømmenger pr. tidsenhet). Imidlertid brukes i en del annen litteratur, spesielt

innen reguleringsteknikken, prikknotasjon for å angi tidsderivert (dvs. $\dot{x} \equiv dx/dt$). Siden vi i dette kapitlet vil arbeide med både tidsderiverte og rater, velger vi her for å unngå forvirring å sløfye all bruk av prikknotasjon. Følgende egne symboler vil bli brukt for rater (strømmengder pr. tidsenhet):

- Molstrøm: $F = \dot{n}$ [mol/s]
- Massestrøm: $w = \dot{m}$ [kg/s]
- Volumstrøm: $q = \dot{V}$ [m³/s]

11.2 Modellering: Dynamiske balanser



Figur 11.1: Balanseprinsippet

Vi betrakter et system avgrenset av en grenseflate (“kontrollvolum”). Utgangspunktet for en fundamental teoretisk modell er systemets balanseligninger (se Kapittel 2) som for en balanserbar størrelse kan skrives

$$\underbrace{\text{Endring Beholdning}}_{\text{akkumulert i systemet}} = \underbrace{\text{Inn} - \text{Ut}}_{\text{gjennom systemets grenseflate}} + \underbrace{\text{Dannet} - \text{Tap}}_{\text{internt i systemet}}$$

I dette kapitlet gjelder leddene “endring”, “inn”, “ut”, “dannet” og “tap” pr. tidsenhet. I prosesssteknikken bruker vi vanligvis balanser for total masse, komponentmasse, energi og impuls. Total masse, energi og impuls er konserverte størrelser slik at leddene for “dannet” og “tap” er null. Komponentmasse er ikke konservert slik at vi her må ha med et ledd for “netto dannet ved kjemisk reaksjon” som representerer summen av “dannet” og “tapt”.

Den generelle balanseligningen *pr. tidsenhet* kan matematisk skrives (se (2.5) side 36):

$$\frac{dB}{dt} = B_{\text{inn}} - B_{\text{ut}} + B_{\text{dannet}} - B_{\text{tap}} \quad (11.2)$$

Her er B beholdningen av størrelsen vi ser på (innenfor systemets grenseflate), $\frac{dB}{dt}$ er endringen i beholdningen pr. tidsenhet, $B_{\text{inn}} - B_{\text{ut}}$ er netto tilført gjennom systemets grenseflate (med massestrømmer eller gjennom vegg), og $B_{\text{dannet}} - B_{\text{tap}}$ er netto tilført internt i systemet. For konserverte størrelser (f.eks. masse og energi) er $B_{\text{dannet}} = 0$ og $B_{\text{tap}} = 0$.

Tidligere har vi som oftest antatt at $dB/dt = 0$, dvs. vi har betraktet en stasjonær prosess. I dette kapitlet skal vi se spesielt på det **dynamiske** tilfellet hvor $dB/dt \neq 0$.

I prinsippet er balanseligningene enkle å formulere, men problemet kan være å bestemme:

1. Hvilket kontrollvolum (hvor trekker vi grenseflaten for det vi balanserer)?
2. Hvilken balanse (hvilken størrelse ser vi på, f.eks. masse eller energi)?

Svaret på det siste spørsmålet er typisk:

- Interessert i masse, volum eller trykk: Massebalanse
- Interessert i konsentrasjon: Komponentbalanse
- Interessert i temperatur: Energibalanse
- Interessert i vekselvirkningen mellom strømming og trykk: Mekanisk energibalanse (= impulsbalanse = Bernoulli = Newtons 2. lov) (i noen av eksemplene under vil vi bruke den statiske impulsbalansen der leddet for akselerasjon er neglisjert).

Vi vil nå vise hvordan den dynamiske modellen kan utledes fra balanseligningene for total masse, komponentmølmengde og energi. Dette vil samtidig gi en oversikt over og repetisjon av materiale presentert i tidligere kapitler.

11.2.1 Dynamisk total massebalanse

Den totale massebalansen kan skrives pr. tidsenhet

$$\boxed{\frac{dm}{dt} = w_{\text{inn}} - w_{\text{ut}}} \quad [\text{kg/s}] \quad (11.3)$$

der m [kg] er systemets masse (“beholdningen av masse innenfor kontrollvolumet”), dm/dt [kg/s] er endringen i massebeholdning pr. tidsenhet, og $w_{\text{inn}} - w_{\text{ut}}$ [kg/s] er masse pr. tidsenhet som følger med **strømmene**. Ved å innføre tettheten fås

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho_{\text{inn}} q_{\text{inn}} - \rho_{\text{ut}} q_{\text{ut}}$$

der V [m³] er systemets volum, q_{inn} [m³/s] og q_{ut} [m³/s] er volumstrømmene, og ρ , ρ_{inn} og ρ_{ut} [kg/m³] er de tilhørende (midlere) tettheter.

For væskesystemer kan man ofte anta at tettheten ρ er konstant (dvs. $\rho = \rho_{\text{inn}} = \rho_{\text{ut}} =$ konstant), og massebalansen forenkles til følgende “volumbalanse”

$$\frac{dV}{dt} = q_{\text{inn}} - q_{\text{ut}} \quad [\text{m}^3/\text{s}] \quad (11.4)$$

Det er her brukt anførselstegn for å markere at volum generelt *ikke* er en konserverte størrelse. I praksis er det ofte væskeniået (høyden h [m]) som er av interesse. Sammenhengen mellom volum og nivå er $V = Ah$ for konstant tverrsnittarealet A [m²], og $V = \int A(h)dh$ generelt der A varierer med høyden. Vi får da at

$$\frac{dV}{dt} = A \frac{dh}{dt} + h \frac{\partial A}{\partial h} \frac{dh}{dt}$$

der det siste leddet er null for konstant A ($\partial A / \partial h = 0$).

Merk at total mølmengde i systemet generelt ikke er en konserverte størrelse, dvs. den totale mølbalansen blir

$$\frac{dn}{dt} = F_{\text{inn}} - F_{\text{ut}} + G \quad [\text{mol/s}] \quad (11.5)$$

der G [mol/s] er total møltallsendring pga. kjemiske reaksjoner.

11.2.2 Dynamisk komponentbalanse

Den dynamiske **komponentbalansen** kan for en vilkårlig komponent A skrives pr. tidsenhet

$$\boxed{\frac{dn_A}{dt} = F_{A,\text{inn}} - F_{A,\text{ut}} + G_A} \quad [\text{molA/s}] \quad (11.6)$$

(vi bruker vanligvis molbasis, men komponentbalansen kan også skrives på vektbasis [kg A/s]). Her er n_A [mol A] beholdningen (mengden) av komponent A innenfor systemets kontrollvolum, $F_{A,\text{inn}} - F_{A,\text{ut}}$ [mol A/s] er mengden som følger med strømmene, og G_A [mol A/s] er netto generert av komponent A ved kjemiske reaksjoner. Denne kan fra (3.7) beregnes fra

$$G_A = \sum_j \nu_{A,j} \xi_j \quad [\text{mol A/s}]$$

der $\nu_{A,j}$ støkiometrisk koeffisient for komponent A i reaksjon j , og ξ_j [mol/s] er reaksjonsomfanget for reaksjon j . I stedet for reaksjonsomfanget kan man alternativt bruke reaksjonshastigheten og fra (10.6) skrive

$$G_A = \int_0^V \underbrace{\sum_j \nu_{A,j} r_j}_{r_A} dV \quad [\text{mol A/s}] \quad (11.7)$$

hvor r_j [mol/ m³ s] er reaksjonshastigheten for reaksjon j . Reaksjonshastigheten er en funksjon av konsentrasjon og sammensetning, og vil generelt variere med posisjonen i reaktoren (og derfor integralet i (11.7)). For eksempel, for en 1.ordens reaksjon $A \rightarrow B$ kan vi ha at

$$r = k(T) c_A \quad [\text{mol A/s m}^3]$$

Her er $r_A = -r$ hvor fortegnet er negativt fordi A fjernes ved reaksjonen og støkiometrisk koeffisient er -1 . Vi antar ofte at temperaturavhengigheten for hastighetskonstanten k følger Arrhenius' ligning

$$k(T) = A e^{-E/RT}$$

der A er en konstant og E [J/mol] er aktiveringsenergien. Vi innfører

$$\bar{c}_A = n_A/V; \quad c_{A,\text{inn}} = F_{A,\text{inn}}/q_{\text{inn}}; \quad c_{A,\text{ut}} = F_{A,\text{ut}}/q_{\text{ut}}$$

der \bar{c}_A [mol/m³] er midlere konsentrasjon av A i reaktoren. Videre defineres midlere reaksjonshastighet $\bar{r}_A = (\int r_A dV)/V$.

Da er $G_A = \bar{r}_A V$ og komponentbalansen kan skrives

$$\boxed{\frac{d(\bar{c}_A V)}{dt} = c_{A,\text{inn}} q_{\text{inn}} - c_{A,\text{ut}} q_{\text{ut}} + \bar{r}_A V} \quad [\text{mol A/s}] \quad (11.8)$$

Vi har her skrevet balansen på konsentrasjonsbasis, men alternativt kunne vi ha brukt molfraksjon eller vektfraksjon.

Eksempel 11.1 Ideell blandetanksreaktor (CSTR). Vi har her perfekt blanding og vi trenger ikke bruke middelerverdier, dvs. $\bar{c}_A = c_A$ og $\bar{r}_A = r_A$. Videre er $c_{A,\text{ut}} = c_A$ og komponentbalansen (11.8) blir

$$\frac{d(c_A V)}{dt} = c_{A,\text{inn}} q_{\text{inn}} - c_A q_{\text{ut}} + r_A V \quad (11.9)$$

Hvis vi tillegg antar konstant tetthet ρ kan vi innføre "volumbalansen" (11.4) slik at venstre side av (11.9) blir

$$\frac{d(c_A V)}{dt} = c_A \frac{dV}{dt} + V \frac{dc_A}{dt} = c_A (q_{\text{inn}} - q_{\text{ut}}) + V \frac{dc_A}{dt}$$

"Ut-leddet" i (11.9) faller da ut og komponentbalansen for en CSTR blir:

$$\boxed{V \frac{dc_A}{dt} = (c_{A,\text{inn}} - c_A) q_{\text{inn}} + r_A V} \quad [\text{mol A/s}] \quad (11.10)$$

Merk at med antagelsen om konstant tetthet gjelder denne ligningen selv om volumet V varierer.

Med litt trening kan man greie å sette opp balanser som (11.10) direkte: “Det som driver konsentrasjonsendringen i blandetanken er den kjemiske reaksjonen samt at innstrømmen har en annen sammensetning enn tanken”. Generelt anbefales det imidlertid at man starter fra basisligningen (11.6).

11.2.3 Dynamisk energibalanse

Det finnes svært mange energiformer som bidrar til systems totale energi: indre energi (U), kinetisk energi, potensiell energi, elektromagnetisk energi, overflateenergi, osv. Av disse er vanligvis indre energi den dominerende i våre systemer, så vi velger å *neglisjere de andre energiformene* i balanseligningene under (men du må gå tilbake til utgangspunktet og ta dem med om det skulle trenge i en konkret situasjon). Hvis vi i energibalansen (4.10) betrakter en tidsperiode Δt der endringen i systemets indre energi er $\Delta U = U_f - U_0$, deler på Δt og lar $\Delta t \rightarrow 0$, fås den dynamiske energibalansen:

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = H_{\text{inn}} - H_{\text{ut}} + Q + W_s - p_{\text{ex}} \frac{dV}{dt}} \quad [\text{J/s}] \quad (11.11)$$

Her er U [J] indre energi for systemet (innenfor kontrollvolumet), mens $H_{\text{inn}} - H_{\text{ut}}$ er summen av indre energi i strømmene samt strømningsarbeidet som strømmene utfører på systemet idet de “dyttes” inn eller ut av systemet. Leddet $-p_{\text{ex}} \frac{dV}{dt}$ er (det negative) arbeidet som tilføres systemet når dets volum økes; det er neglisjerbart for de fleste systemer. Q [J/s] er tilført varme (gjennom systemets vegg), mens W_s [J/s] er tilført nyttig mekanisk arbeid (vanligvis akselarbeid, f.eks. fra en kompressor, pumpe eller turbin).

Merk at det ikke er noe ledd av typen “varme utviklet ved kjemisk reaksjon” fordi reaksjonsvarmen indirekte er med i leddene dU/dt , H_{inn} , og H_{ut} .

Energibalanse med entalpi

Vi foretrekker vanligvis å arbeide med entalpien, og innføres $U = H - pV$ i energibalansen (11.11), får vi

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = H_{\text{inn}} - H_{\text{ut}} + Q + W_s - \underbrace{(p_{\text{ex}} - p) \frac{dV}{dt} + V \frac{dp}{dt}}_{\text{trykk-volum-endringer}}} \quad [\text{J/s}] \quad (11.12)$$

Her er $H = mh$ [J] der m [kg] er masse og h [J/kg] er spesifikk entalpi.

Kommentarer:

1. Vi har at $\frac{dH}{dt} = m \frac{dh}{dt} + h \frac{dm}{dt}$ og ved å innføre massebalansen (11.3), kan energibalansen på “massestrømbasis” skrives

$$m \frac{dh}{dt} = w_{\text{inn}}(h_{\text{inn}} - h) - w_{\text{ut}}(h_{\text{ut}} - h) + Q + W_s - \underbrace{(p_{\text{ex}} - p) \frac{dV}{dt} + V \frac{dp}{dt}}_{\text{trykk-volum-endringer}} \quad (11.13)$$

2. Alle entalpier må refereres i forhold til en felles referansetilstand (f.eks. elementene ved 298K og 1 bar), og entalpien H (eller h) kan da skrives som summen av (1) kjemisk dannelsesenergi, (2) “latent” faseovergangsenergi (hvis fasen er ulik standardtilstanden), (3) termisk energi (“følbar c_p -varme”), (4) blandingsenergi og (5) trykk-korreksjonsenergi; se side 320.

3. Entalpien $H(T, p, f, n_j)$ [J/kg] er altså generelt en funksjon av temperatur T , trykk p , fasefordeling f (fraksjon av lett fase) og sammensetning (n_j). Den tidsderiverte av entalpien kan da skrives

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial T}}_{c_p} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial f}}_{\Delta_{\text{trs}}H} \frac{df}{dt} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial n_j} \frac{dn_j}{dt} \quad (11.14)$$

Det siste leddet tar med seg bidrag fra både kjemisk reaksjon og blanding. Dette kan bli ganske tungvint, og for numeriske beregninger anbefales det at man arbeider direkte med H (eller U) som intern variabel (“tilstand”); se side 275 om løsning av differensial-algebraiske ligninger (DAE).

4. For tilfellet med samme fase for utstrøm og system, og perfekt blanding (CSTR) er $h_{\text{ut}} = h$ slik at “ut-leddet” i (11.12) faller ut.
5. Leddet “trykk-volum-endringer” i 11.12 er ofte neglisjerbart:
- Leddet er eksakt likt null (også for gasser) for tilfeller med konstant trykk og volum.
 - Leddet er eksakt likt null (også for gasser) for tilfeller der trykket er konstant og lik omgivelsenes trykk ($p = p_{\text{ex}} = \text{konstant}$).
 - Selv med varierende trykk er leddet tilnærmet lik null for væsker og faste stoff (fordi volumet V er relativt lite for slike systemer).

Leddet “trykk-volum-endringer” kan være vesentlig for gasser med varierende trykk, f.eks. for en gassrørledning.

Energibalanse med temperatur (uten reaksjon og faseovergang)

Vi ønsker her å utlede en differensialligning for temperaturen. Dette gir innsikt og er praktisk ved del beregninger.

Entalpien trykkavhengighet er ofte liten, og vi velger her å neglisjere den. For tilfeller der systemet og den enkelte strøm har *konstant sammensetning og fasefordeling* (men mengdene kan variere), er da de spesifikke entalpi i (11.13) kun en funksjon av temperaturen. Vi kan da skrive

$$h(T) = h(T_{\text{ref}}) + \int_{T_{\text{ref}}}^T c_p(T) dT \quad (11.15)$$

der $h(T_{\text{ref}})$ er en konstant siden sammensetningen og fasefordelingen er konstant. Dette forenkles ytterligere for tilfellet der vi *ikke har reaksjon eller faseovergang*. Da har strømmene lik fase og sammensetning, slik at leddene $h(T_{\text{ref}})$, $h_{\text{inn}}(T_{\text{ref}})$ og $h_{\text{ut}}(T_{\text{ref}})$ med referanseentalpi er like og derved faller ut når vi setter alt inn i energibalansen (11.13):

$$m c_p(T) \frac{dT}{dt} = w_{\text{inn}} \int_T^{T_{\text{inn}}} c_p(T) dT - w_{\text{ut}} \int_T^{T_{\text{ut}}} c_p(T) dT + Q + W_s \underbrace{-(p_{\text{ex}} - p) \frac{dV}{dt} + V \frac{dp}{dt}}_{\text{trykk-volum-endringer}}$$

Hvis vi i tillegg antar at *varmekapasiteten er konstant* (uavhengig av temperaturen) blir energibalansen:

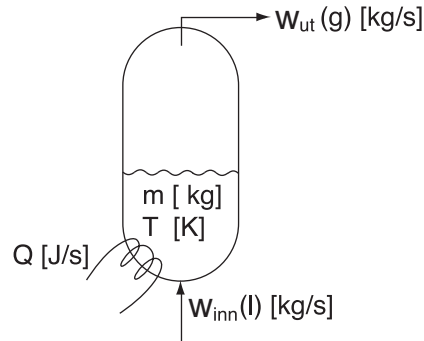
$$m c_p \frac{dT}{dt} = w_{\text{inn}} c_p (T_{\text{inn}} - T) - w_{\text{ut}} c_p (T_{\text{ut}} - T) + Q + W_s \underbrace{-(p_{\text{ex}} - p) \frac{dV}{dt} + V \frac{dp}{dt}}_{\text{trykk-volum-endringer}} \quad (11.16)$$

Dette forenkles ytterligere for en ideell blandetank (CSTR) der vi har $T_{\text{ut}} = T$.

Energibalanse med faseovergang

La oss se på et litt mer komplisert eksempel med faseovergang, der vi ikke kan bruke (11.16).

Eksempel 11.2 Faseovergang: Energibalanse for fordampner.



Figur 11.2: Fordampner for vann

Vi betrakter fordampneren vist i Figur 11.2. Vi neglisjerer massen av gass i forhold til massen av væske i systemet (inni fordampneren). Massebalansen blir

$$\frac{dm}{dt} = w_{\text{inn}} - w_{\text{ut}} \quad [\text{kg/s}]$$

Siden vi antar kun væske i tanken kan vi neglisjere leddene med “trykk-volum-endringer” (selv når trykket varierer) og vi har heller ikke noe akselarbeid ($W_s = 0$). Energibalansen (11.13) blir da

$$m \frac{dh}{dt} = w_{\text{inn}}(h_{\text{inn}} - h) - w_{\text{ut}}(h_{\text{ut}} - h) + Q \quad [\text{J/s}]$$

Entalpien h [J/kg] av væsken i tanken er kun en funksjon av temperaturen, og vi har $dh/dt = c_{pL} dT/dt$, der vi bruker betegnelsen c_{pL} [J/K kg] for å angi at det er væske.

Innstrømmen og massen i fordampneren har samme sammensetning og fase (væske). Vi har da at

$$h_{\text{inn}}(T_{\text{inn}}) - h(T) = \int_T^{T_{\text{inn}}} c_{pL}(T) dT \quad [\text{J/kg}]$$

Vi antar perfekt blanding slik at $T = T_{\text{ut}}$. Siden utstrømmen er i gassfase, får vi da

$$h_{\text{ut}}(T) - h(T) = \Delta_{\text{vap}} h(T) \quad [\text{J/kg}]$$

der $\Delta_{\text{vap}} h(T)$ er fordampningsvarmen for vann ved T . Energibalansen (11.13) for fordampneren blir

$$\boxed{m c_{pL}(T) \frac{dT}{dt} = w_{\text{inn}} \int_T^{T_{\text{inn}}} c_{pL}(T) dT - w_{\text{ut}} \Delta_{\text{vap}} h(T) + Q} \quad [\text{J/s}] \quad (11.17)$$

Merk at (11.17) gjelder også når massen m i tanken varierer med tiden.

Kommentarer.

1. Ofte er fordampningsvarmen gitt ved temperaturen T_{ref} (f.eks. kokepunktet). Fordampningsvarmen ved T kan da finnes ved å betrakte følgende delprosesser: 1) avkjøling av væsken fra T til T_{ref} , 2) fordampning ved T_{ref} og 3) oppvarming av dampen fra T_{ref} til T . Vi får da

$$\Delta_{\text{vap}}h(T) = \Delta_{\text{vap}}h(T_{\text{ref}}) + \int_{T_{\text{ref}}}^T (c_{pV} - c_{pL})dT$$

der $\Delta_{\text{vap}}h(T_{\text{ref}})$ er fordampningsvarmen ved temperaturen T_{ref} , og c_{pV} er varmekapasiteten for dampen.

2. Temperatur og trykk må henge sammen gjennom damptrykkskurven: $p = p^{\text{sat}}(T)$ (se side 341). Det kan tenkes praktiske situasjoner der vi holder trykket (og derved temperaturen) konstant, og vi kan da bruke (11.17) med $dT/dt = 0$ til å finne w_{ut} eller Q .

Med litt trening kan man greie å sette opp energibalanser av denne type direkte: Man tenker seg at man “står i tanken” (systemet) og har dennes temperatur og fase som referanse. Man betrakter så hva som kan forårsake endringer i systemets temperatur. I eksemplet med fordampningen, kan (11.17) utledes som følger:

“Det som driver temperaturendringen i tanken (venstre side) er at innstrømmen har en annen temperatur enn tanktemperaturen (første ledd høyre side), at entalpi fjernes ved fordampning (andre ledd) og at vi tilfører varme (tredje ledd).”

Leddene for utstrømmen faller ut siden den har samme temperatur som tanken. Men generelt anbefales det at man starter fra basisligningene og bruker systematikk.

Øving 11.1 Vi skal utlede energibalansen for en flashtank med beholdning n [mol], føde F [mol/s], dampprodukt D [mol/s] og væskeprodukt B [mol/s] (tegn figur). Vis ved en systematisk utledning at energibalansen kan skrives

$$nC_{pL} \frac{dT}{dt} = FC_{pL}(T_F - T) + D \cdot \Delta_{\text{vap}}H(T)$$

Hva er enhetene for størrelsene i ligningen? Hvilke antagelser er gjort ved utledning av denne?

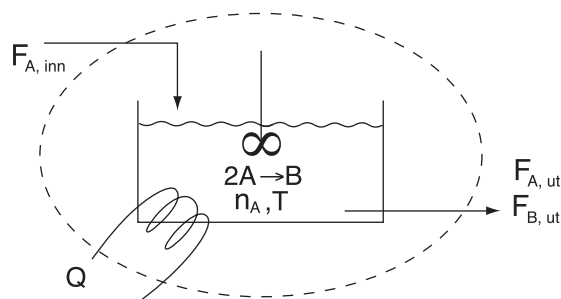
Energibalanse med kjemisk reaksjon

For tilfeller med kjemisk reaksjon er det vanligvis mest hensiktsmessig å bruke molbasis og gå tilbake til (11.12) og innføre $H(T, p, n_j) = \sum_j n_j \bar{H}_{m,j}(T, p)$. Her er $\bar{H}_{m,j}$ [J/mol] den “partielle molare entalpien” for komponent j i blandingen. For tilfellet med neglisjerbar blandingsvarme (=blandingsentalpi) har vi at $\bar{H}_{m,j} = H_{m,j}$, der $H_{m,j}$ er den molare entalpien av ren komponent j i den aktuelle fasen. La oss med dette som utgangspunkt utlede den generelle energibalansen med temperatur for en blandetanksreaktor.

Eksempel 11.3 Energibalanse med temperatur for blandetanksreaktor (CSTR).

Vi betrakter en ideell blandetanksreaktor (CSTR) der det skjer en kjemisk reaksjon (Figur 11.3). La oss som eksempel betrakte reaksjonen $2A \rightarrow B$, men utledningen under er generell og gjelder for en vilkårlig reaksjon. Hastigheten for reaksjonen er $r(T, c_A)$ [mol/m³], og hvis vi tar hensyn til støkiometrien blir komponentbalansene:

$$\begin{aligned} \frac{dn_A}{dt} &= F_{A,\text{inn}} - F_{A,\text{ut}} + \underbrace{\nu_A r V}_{G_A} \quad [\text{mol A/s}] \\ \frac{dn_B}{dt} &= F_{B,\text{inn}} - F_{B,\text{ut}} + \underbrace{\nu_B r V}_{G_B} \quad [\text{mol B/s}] \end{aligned}$$



Figur 11.3: Blandetanksreaktor

der de støkiometriske koeffisienter i vårt eksempel er $\nu_A = -2$ og $\nu_B = 1$. Vi ser bort fra akselarbeid og antar at "trykk-volum-bidraget" kan neglisjeres. Energibalansen blir da

$$\frac{dH}{dt} = H_{\text{inn}} - H_{\text{ut}} + Q \quad [\text{J/s}] \quad (11.18)$$

Hvis vi neglisjerer blandingsentalpien, kan entalpieren skrives

$$H(T, p, n_A, n_B) = n_A H_{m,A}(T, p) + n_B H_{m,B}(T, p) \quad [\text{J}]$$

der $H_{m,j}(T, p)$ [J/mol] er den molare entalpieren for komponent j . Vi velger her elementene i sin standard tilstand ved 298.15 K og $p^\ominus = 1$ bar som referanse. Hvis vi neglisjerer trykkets innflytelse på entalpieren har vi derved at

$$H_{m,j}(T, p) = H_j^\ominus(T) \quad [\text{J/mol}]$$

der $H_j^\ominus(T) = \Delta_f H_j^\ominus(T)$ [J/mol] er standard dannelsentalpi for å danne komponent i i sin aktuelle tilstand ved T og 1 bar fra elementene ved 298 K og 1 bar. Hvis vi antar at alt skjer i samme fase kan vi da skrive

$$\begin{aligned} H &= n_A H_A^\ominus(T) + n_B H_B^\ominus(T) \quad [\text{J}] \\ H_{\text{inn}} &= F_{A,\text{inn}} H_A^\ominus(T_{\text{inn}}) + F_{B,\text{inn}} H_B^\ominus(T_{\text{inn}}) \quad [\text{J/s}] \\ H_{\text{ut}} &= F_{A,\text{ut}} H_A^\ominus(T_{\text{ut}}) + F_{B,\text{ut}} H_B^\ominus(T_{\text{ut}}) \quad [\text{J/s}] \end{aligned}$$

Innsetting i energibalansen (11.18) gir

$$\begin{aligned} & n_A \overbrace{\frac{dH_A^\ominus(T)}{dT}}^{c_{p,m,A}(T)} \frac{dT}{dt} + n_B \overbrace{\frac{dH_B^\ominus(T)}{dT}}^{c_{p,m,B}(T)} \frac{dT}{dt} + H_A^\ominus(T) \frac{dn_A}{dT} + H_B^\ominus(T) \frac{dn_B}{dT} \\ &= F_{A,\text{inn}} H_A^\ominus(T_{\text{inn}}) + F_{B,\text{inn}} H_B^\ominus(T_{\text{inn}}) - F_{A,\text{ut}} H_A^\ominus(T_{\text{ut}}) - F_{B,\text{ut}} H_B^\ominus(T_{\text{ut}}) + Q \end{aligned}$$

Vi antar perfekt blanding slik at $T = T_{\text{ut}}$. Ved å sette inn for uttrykkene for dn_A/dt og dn_B/dt fra massebalansene og samle leddene (litt jobbing her...) blir endelig energibalansen på "temperaturform":

$$\boxed{n C_{p,m} \frac{dT}{dt} = F_{\text{inn}} \int_T^{T_{\text{inn}}} C_{p,m,\text{inn}}(T) dT + (-\Delta_r H^\ominus(T)) rV + Q} \quad (11.19)$$

(For tilfeller med flere reaksjoner erstattes leddet $(-\Delta_r H^\ominus(T)) rV$ med $\sum_j (-\Delta_r H_j^\ominus(T)) r_j V$.)
Her er

$$\Delta_r H^\ominus(T) = \sum_j \nu_j H_j^\ominus = H_B^\ominus - 2H_A^\ominus \quad [\text{J/K mol}] \quad (11.20)$$

reaksjonsvarmen ved temperaturen T ,

$$n = n_A + n_B \quad [\text{mol}]$$

er totalt antall mol i reaktoren,

$$F_{\text{inn}} = F_{A,\text{inn}} + F_{B,\text{inn}} \quad [\text{mol/s}]$$

er totalt fødemengde,

$$C_{p,m} = \frac{n_A}{n} C_{p,m,A}(T) + \frac{n_B}{n} C_{p,m,B}(T) \quad [\text{J/K mol}]$$

er molar varmekapasitet for reaktoren, og

$$C_{p,m,\text{inn}}(T) = \frac{F_{A,\text{inn}}}{F_{\text{inn}}} C_{p,m,A}(T) + \frac{F_{B,\text{inn}}}{F_{\text{inn}}} C_{p,m,B}(T) \quad [\text{J/K mol}]$$

er molar varmekapasitet for føden. La oss oppsummere antagelsene som er gjort ved utledning av (11.19):

1. Alle strømmer har samme fase.
2. Perfekt blanding slik at $T = T_{\text{ut}}$.
3. Blandingsvarme er neglisjert.
4. Trykkets innflytelse på entalpien er neglisjert.

Forøvrig er (11.19) generell og gjelder for tilfellet med varierende sammensetning i reaktoren og varierende mengde n ("holdup") i reaktoren. For et mer detaljert eksempel med dynamisk simulering vises det til side 271.

Igjen kan man med litt erfaring direkte sette opp energibalansen (11.19) på temperaturform for en blandetanksreaktor:

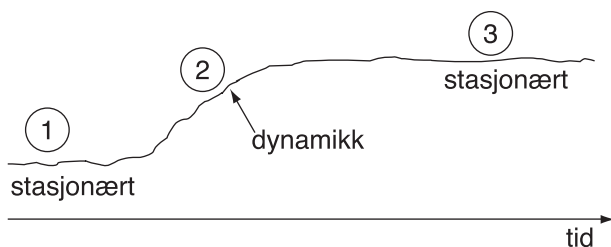
"Temperaturoendringer i reaktoren (venstre side) drives av avvik mellom fødetemperatur og reaktortemperatur (første ledd høyre side), av reaksjonsvarmen (andre ledd) og av tilført varme (tredje ledd)".

Kommentarer.

1. Vi merker oss at "reaksjonsvarmen" dukker opp som et eget ledd når vi velger å skrive energibalansen på "temperaturform" som i (11.19).
2. Energibalansen på temperaturformen (11.19) gir interessant innsikt og er nyttig i mange sammenhenger. Imidlertid er det vanligvis enklere for numeriske beregninger (dynamisk simulering) å holde seg til den opprinnelige formen (11.11) eller (11.12) med U eller H som tilstand (differensiell variabel). Det vises til side 275 om løsning av DAE-ligninger.

11.2.4 Stasjonære balanser

De dynamiske balansene utledet over er alle på formen $dy/dt = f(y, u)$. Vi antar vanligvis at forholdene initielt er stasjonære, dvs. at systemet initielt er "i ro" med $dy/dt = 0$. De tilhørende stasjonære (nominelle) verdiene for u og y angis ved å bruke superskript $*$, og må tilfredsstille $f(y^*, u^*) = 0$.



Figur 11.4: Dynamisk respons i y til endring i u

11.3 Dynamisk analyse og tidsrespons

Vi skal nå prøve å forstå hva som skjer når vi får en ubalanse i systemet slik at systemets tilstander endrer seg med tiden. I denne hensikt la oss betrakte følgende hendelse (se Figur 11.4):

1. Systemet er initielt “i ro” (stasjonær tilstand)
2. Det skjer en endring i en av systemets uavhengige variable (parametere eller ytre betingelser) slik at systemet kommer i ubalanse (systemets tilstander endrer seg med tid)
3. Etter en tid (egentlig når $t \rightarrow \infty$) kommer systemet til en ny likevektstilstand der det igjen er “i ro” (ny stasjonær tilstand).

Noen eksempler er

- Hvis vi en vinterdag setter på mer varme i et rom, vil temperaturen begynne å stige. Endringen vil være størst til å begynne med, og temperaturen vil “etter en viss tid” nærme seg en ny stasjonær verdi (der “systemet er i ro”).
- Hvis det kommer et vedvarende regnfall, vil vannstanden i innsjøen stige. Endringen vil være størst til å begynne med, og vannstanden vil “etter en viss tid” nærme seg en ny stasjonær verdi.
- I en kjemisk reaktor har vi kontinuerlig tilførsel av reaktant. Hvis vi øker konsentrasjonen av reaktant, vil produktkonsentrasjonen stige. Endringen vil være størst til å begynne med, og produktkonsentrasjonen vil “etter en viss tid” nærme seg en ny stasjonær verdi.

I alle disse tilfeller går vi fra en stasjonær tilstand til en annen, og det er tilstrekkelig med en stasjonær modell for å beregne start- og slutt-tilstanden. Men for å kunne si noe om den dynamiske responsen og kvantifisere hva som er “en viss tid”, trenger vi naturligvis en dynamisk modell.

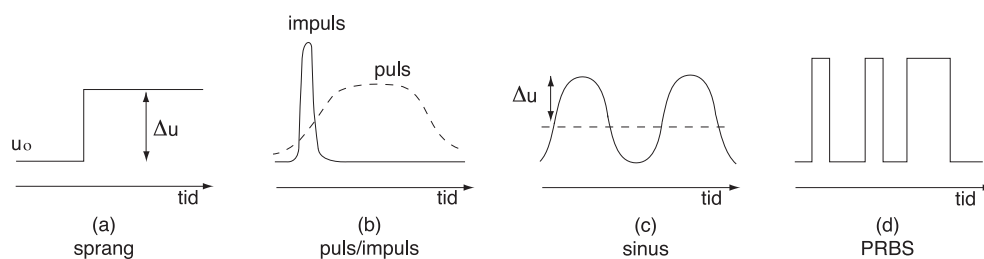
Med **respons** mener vi her tidsresponsen i den avhengige variabelen y når vi gjør en endring (“påtrykker et signal”) i den uavhengige variabelen u . Fire viktige responser er (se Figur 11.5):

Sprangrespons. I alle eksemplene ovenfor betraktet vi en *sprangvis endring* i den uavhengige variabelen u (varmetilførsel, vanntilførsel, fødekonsentrasjon). Matematisk kan dette skrives

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & t \leq t_0 \\ u_\infty = u_0 + \Delta u & t > t_0 \end{cases}$$

der Δu er størrelsen på spranget. Den resulterende responsen i den uavhengige variabelen y (temperatur, vann-nivå, produktkonsentrasjon) kalles sprangresponsen.

Impulsrespons. En puls er en midlertidig endring av den uavhengige variabelen u , og hvis varigheten er meget kort (neglisjerbar) i forhold til systemets dynamikk, har vi



Figur 11.5: Tidssignaler for $u(t)$

en impuls. Impulsresponsen er den resulterende responsen i y . For eksempel gir et regnskyl en puls, og hvis det er tilstrekkelig kortvarig (og kraftig slik at vi kan merke effekten) er det en impuls. Prosesstekniske eksempler på impulser kan være å “hive oppi en bøtte” eller å injisere et konsentrat med en sprøyte. For et strømmende system er den såkalte *oppholdstidsfordelingsfunksjonen* lik impulsresponsen i konsentrasjon for en ikke-reagerende komponent.

Frekvensrespons. Dette er den resulterende sinusresponsen i y til en vedvarende sinusvariasjon i den uavhengige variabelen u ,

$$u(t) = u_0 + \Delta u \cdot \sin(\omega t)$$

For små endringer kan vi anta at systemet er lineært, og utsignalet vil da være en sinus med samme frekvens ω :

$$y(t) = y_0 + \Delta y \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

Frekvensresponsen karakteriseres av to størrelser: Forsterkningen $\Delta y/\Delta u$, og av faseforskyvningen, ϕ . Begge størrelsene avhenger av frekvensen ω [rad/s], og ved å variere frekvensen ω fås informasjon om hvordan systemet reagerer på raske (ω stor) og langsomme (ω liten) endringer. Frekvensanalysen er et viktig hjelpemiddel i reguleringssteknikken.

PRBS-respons. Dette er responsen i y når den uavhengige variabelen u endres ved “tilfeldige” tidspunkter mellom to gitte verdier (PRBS = pseudo-random binary sequence). Dette gir god “dynamisk spredning” og er ofte en effektiv metode for å fremskaffe eksperimentelle data som kan brukes til å estimere (“identifisere” i reguleringssteknikken) parametere i en empirisk dynamisk modell for sammenhengen mellom u og y .

Sprangresponsen er meget populær i prosessteknikken fordi den er enkel å utføre og analysere. Vi vil i det videre studere sprangresponsen.

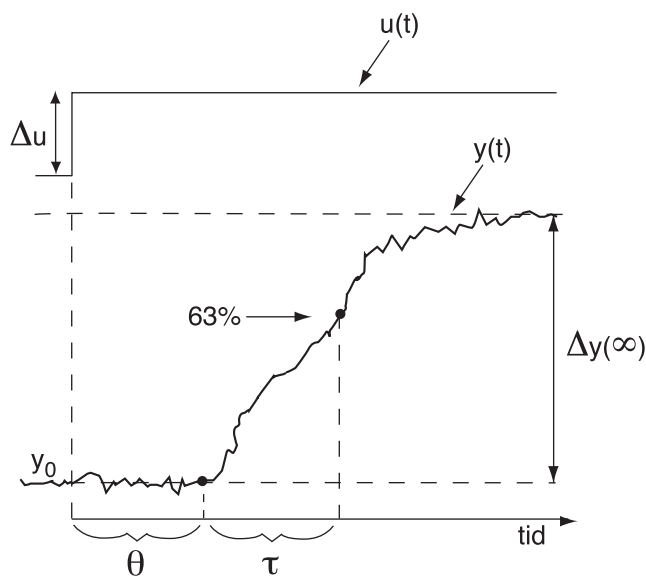
11.3.1 Sprangrespons og tidskonstant

Vi betrakter et system som initielt er “i ro”, dvs. det er i en stasjonær tilstand der $dy/dt = 0$. Det skjer så en sprangvis endring i en uavhengig variabel u , som tar systemet vekk fra den initielle stasjonære tilstanden. Vi antar at systemet er stabilt slik at det etter hvert nærmer seg ny stasjonær tilstand. Den resulterende **sprangresponsen** i $y(t)$ karakteriseres ofte ved følgende tre parametere (se Figur 11.6):

(Stasjonær) Forsterkning $k = \frac{\Delta y(\infty)}{\Delta u}$.

(Effektiv) Dødtid θ - tiden det tar før y “tar av” i “riktig” retning.

Tidskonstant τ - ytterligere tid det tar å oppnå 63% av den totale endringen i y (dvs. $\Delta y(\tau + \theta) = 0.63\Delta y(\infty)$).



Figur 11.6: Eksperimentell sprangrespons

Her er

- $\Delta u = u(\infty) - u(t_0)$ - størrelsen på sprangendringen i u
- t_0 - tidspunkt for sprangendringen i u (ofte velges $t_0 = 0$)
- $\Delta y(t) = y(t) - y(t_0)$ - den resulterende endringen i y
- $y(t_0) = y_0$ - (gitt) initieell stasjonær tilstand
- $y(\infty)$ - endelig (ny) stasjonær tilstand

Verdien av $\Delta y(\infty) = y(\infty) - y(t_0)$, og derved den stasjonære forsterkningen k , kan bestemmes fra en stasjonær modell om en slik er tilgjengelig.

Dødtiden (tidsforsinkelsen) θ kan skyldes en transportforsinkelse (f.eks. et rør) eller dødtid i en måling, men den representerer i de fleste tilfeller bidraget fra mange separate dynamiske ledd som i sum gir en respons som ligner en dødtid (derav begrepet “effektiv” dødtid).

Tidskonstanten τ karakteriserer systemets dominerende “treghet” mot endringer. Den er definert som tiden det tar for variabelen å foreta 63% (mer presist en fraksjon $1 - e^{-1} = 1 - 0.3679 \approx 0.63$, se under) av sin totale endring. Hvorfor lar vi ikke tidskonstanten være den tiden det tar å foreta hele (100%) av endringen? Det skyldes at det vanligvis vil ta uendelig lang tid før man kommer eksakt til slutt-tilstanden, slik at dette ikke vil gi en entydig verdi.

Verdiene av parametrene k , τ og θ er uavhengige av størrelsen på spranget (uavhengige av verdien av Δu), forutsatt at spranget er tilstrekkelig lite (dvs. at Δu er tilstrekkelig liten) slik at vi befinner oss i det “lineære området”. Vi viser på side 261 hvordan vi kan utlede en lineær modell som gjelder i slike grensetilfeller.

11.3.2 Sprangrespons for 1.ordens system

Utgangspunktet for definisjonen av τ gitt over, er det enkleste tilfellet med én lineær differensialligning (1.ordens system) skrevet på følgende standard form

$$\boxed{\tau \frac{dy}{dt} = -y + ku} \quad y(t_0) = y_0 \quad (11.21)$$

hvor

- u er den uavhengige variabelen
- y er den avhengige variabelen
- τ er tidskonstanten
- k er forsterkningen

Vi antar nå at

1. Systemet er "i ro" ved tiden t_0 , dvs. for $t \leq t_0$ er $u = u_0$ og $y_0 = ku_0$ slik at $dy/dt = 0$.
2. Den uavhengige variabelen u gjør et sprang fra u_0 til en konstant verdi $u = u_0 + \Delta u$ ved tiden t_0 .

Som bevist under kan da løsningen ("sprangresponsen") skrives

$$\boxed{y(t) = y_0 + (1 - e^{-t/\tau}) k \Delta u} \quad (11.22)$$

eller

$$\underbrace{\Delta y(t)}_{y(t) - y(0)} = \underbrace{\Delta y(\infty)}_{y(\infty) - y(0)} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (11.23)$$

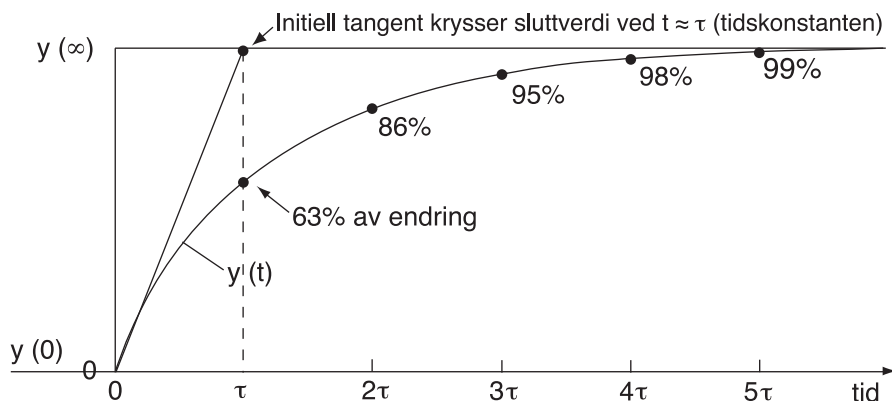
(det anbefales at man prøver å huske denne). k er den stasjonære forsterkningen, og når $t \rightarrow \infty$ fås at $e^{-t/\tau} \rightarrow 0$ og systemet går mot en ny stasjonær tilstand der $\Delta y(\infty) = k \Delta u$. Vi merker oss at det eksponentielle leddet $1 - e^{-t/\tau}$ beskriver hvor raskt systemet nærmer seg sin nye stasjonære tilstand, og som funksjon av den dimensjonsløse tiden t/τ har vi:

t/τ	$1 - e^{-t/\tau}$	Verdi	Kommentar
0	$1 - e^0 =$	0	
0.1	$1 - e^{-0.1} =$	0.095	
1	$1 - e^{-1} =$	0.632	63% av endring nås etter tiden $t = \tau$
2	$1 - e^{-2} =$	0.865	
3	$1 - e^{-3} =$	0.950	
4	$1 - e^{-4} =$	0.982	98% av endring nås etter tiden $t = 4\tau$
5	$1 - e^{-5} =$	0.993	
∞	$1 - e^{-\infty} =$	1	

Tidsresponsen er plottet i Figur 11.7. Vi merker oss at vi etter tiden $t = \tau$ (tidskonstanten) har nådd 63% av den totale endringen (så da har vi kommet et godt stykke på vei), og at vi etter 4 tidskonstanter har nådd 98% av endringen (så da har vi for praktiske formål kommet til den nye stasjonære tilstanden). Merk også at tangenten til responsen i tiden $t = 0$ går igjennom punktet $(\tau, y(\infty))$. Dette kan enkelt vises matematisk fra (11.23):

$$\frac{dy}{dt} = (y(\infty) - y(0)) \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=0} = \frac{y(\infty) - y(0)}{\tau} \quad (11.24)$$

Dette betyr at responsen $y(t)$ ville krysse sluttverdien $y(\infty)$ etter tiden τ om den fortsatte uforandret.



Figur 11.7: Sprangrespons for 1.ordens system

Kommentarer.

1. Som det fremgår av beviset under gjelder (11.23) også for tilfeller der systemet ikke initielt er i ro. Det gjør derimot ikke (11.22).
2. For tilfeller der τ er negativ er systemet ustabil, og vi får at $y(t)$ går mot uendelig når t går mot uendelig.
3. Fra (11.24) og $\Delta y(\infty) = k\Delta u$ utleder vi at

$$\frac{1}{\Delta u} \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=0} = \frac{k}{\tau} \tag{11.25}$$

Dette betyr at den initielle stigningen (tangenten) for den “normaliserte” responsen $\Delta y(t)/\Delta u$ er lik forholdet k/τ .

Bevis: Sprangrespons for 1.ordens system

Vi betrakter et “1.ordens system” beskrevet på standard form (11.21) med følgende lineære differensialligning:

$$\tau \frac{dy}{dt} = -y + ku; \quad y(0) = y_0 \tag{11.26}$$

hvor både τ og ku er konstante. Den lineære differensialligningen (11.26) kan løses på mange måter. Vi kan f.eks. bruke separasjon av variable og utleder

$$\frac{dy}{y - ku} = -\frac{dt}{\tau}$$

Integrasjon gir

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y - ku} = \int_0^t -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \ln \frac{y - ku}{y_0 - ku} = -\frac{t}{\tau}$$

og vi får den generelle løsningen

$$y(t) = ku + e^{-t/\tau}(y_0 - ku)$$

Vi trekker fra y_0 på begge sider og får

$$y(t) - y_0 = \left(1 - e^{-t/\tau}\right) (ku - y_0) \tag{11.27}$$

Siden $e^{-t/\tau} \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$, har vi at $y(\infty) = ku$, og ved å definere avviksvARIABLE

$$\Delta y(t) \triangleq y(t) - y(0) = y(t) - y_0 \tag{11.28}$$

får vi at (11.27) kan skrives på følgende generelle form

$$\Delta y(t) = \Delta y(\infty) \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad (11.29)$$

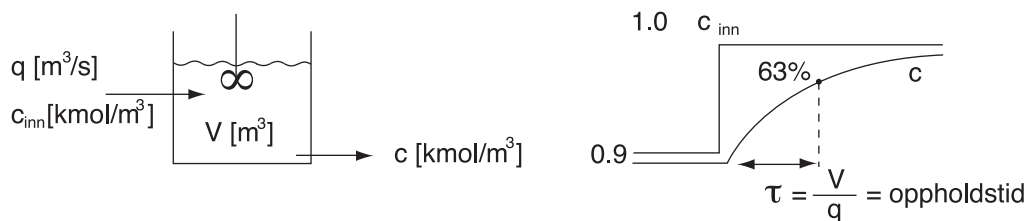
Vi har til nå ikke antatt at systemet er “i ro” ved $t = t_0$, men la oss nå gjøre dette. Vi har da ved $t = t_0$ at $dy/dt = 0$, dvs.

$$y_0 = k u_0$$

og (11.27) gir:

$$\underbrace{\Delta y(t)}_{y(t) - y_0} = \left(1 - e^{-t/\tau}\right) k \underbrace{\Delta u}_{u - u_0} \quad (11.30)$$

Eksempel 11.4 Konsentrasjonsrespons i blandetank



Figur 11.8: Blandetank uten reaksjon

Vi betrakter konsentrasjonsresponsen for komponent A i en blandetank uten kjemisk reaksjon (se Figur 11.8). Vi antar konstant væsketetthet ρ og konstant volum V . Systemet antas å være i ro ved $t = 0$. Vi ønsker å beregne sprangresponsen for $t > 0$ gitt følgende data

$$V = 5 \text{ m}^3; \quad q = 1 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$c_{A,\text{inn}} = \begin{cases} c_0 = 0.9 \text{ kmol/m}^3 & t \leq 0 \\ c_\infty = 1.0 \text{ kmol/m}^3 & t > 0 \end{cases}$$

Løsning. Med konstant tetthet og konstant volum gir massebalansen at volumstrømmene inn og ut er like, $q_{\text{inn}} = q_{\text{ut}} = q$. Vi antar videre perfekt omrøring i tanken slik at $c_{A,\text{ut}} = c_A$. Komponentbalansen for tanken blir da [mol A/s]

$$\frac{d}{dt} (c_A V) = q c_{A,\text{inn}} - q c_A \quad (11.31)$$

som med konstant volum V gir

$$\frac{V}{q} \frac{dc_A}{dt} = -c_A + c_{A,\text{inn}} \quad (11.32)$$

Denne er på standard form (11.21) med

$$u = c_{A,\text{inn}}; \quad y = c_A$$

og

$$k = 1; \quad \tau = \frac{V}{q} \quad \frac{[\text{m}^3]}{[\text{m}^3/\text{s}]} = [\text{s}]$$

Her er V/q [s] oppholdstiden for masse i tanken, dvs. tidskonstanten er i dette tilfellet lik oppholdstiden. Fra (11.22) er da løsningen av (11.32) (“sprangresponsen”) gitt ved

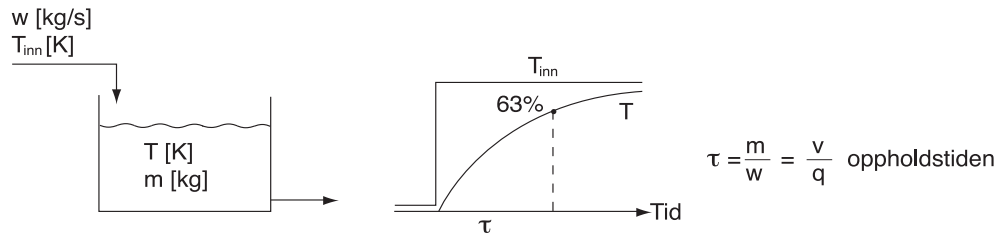
$$c_A(t) = c_0 + \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \Delta c_{A,\text{inn}} \quad (11.33)$$

der $\Delta c_{A,inn} = c_\infty - c_0 = 0.1 \text{ kmol/m}^3$. Ved tiden $t = 0$ er da $c_A(0) = c_0 = 0.9 \text{ kmol/m}^3$, og konsentrasjonen stiger så slik at den ved tiden $t = \tau = 5 \text{ h}$ (oppholdstiden) er $0.9 + (1 - e^{-1}) \cdot 0.1 = 0.963 \text{ kmol/m}^3$, og ved tiden $t = \infty$ er $c_A(\infty) = 0.9 + 0.1 = 1 \text{ kmol/m}^3$ (som forventet).

11.3.3 Noen flere eksempler på sprangresponser for 1.ordens system

Vi betrakter her noen flere relativt enkle eksempler med kun 1 differensialligning som alle gir en 1.ordens respons tilsvarende den i Figur 11.7.

Eksempel 11.5 Temperaturdynamikk i blandetank.



Figur 11.9: Temperaturdynamikk i blandetank uten reaksjon

Betrakt den kontinuerlige prosessen i Figur 11.9 der en væskestrøm på 1 kg/s (konstant) "mellomlagres" på en tank på 1.2 m^3 . Tettheten av væsken er 1000 kg/m^3 og varmekapasiteten er 4 kJ/kg K . Det kan antas perfekt blanding i tanken. Volumet (massen) i tanken antas konstant.

Prosessen opereres først stasjonært slik at inntemperaturen T_{inn} er 50°C og uttemperaturen $T_{ut} = T$ er 50°C (så det er ikke noe varmetap). Plutselig endres temperaturen på innstrømmen sprangvis til 60°C . Temperaturen ut vil etter hvert også nå 60°C , men det vil ta en viss tid. **Spørsmålet er:** Hvor stor er tidskonstanten, dvs. hvor lang tid tar det før temperaturen i tanken (og i utstrømmen) har økt med $0.63 \cdot 10 = 6.3^\circ \text{C}$ til 56.3°C ?

Løsning. Siden massen i tanken er konstant, sier massebalansen bare at $w_{ut} = w_{inn} = w = 1 \text{ kg/s}$. Energibalansen (11.12) for tanken blir (væske)

$$\frac{dH}{dt} = H_{inn} - H_{ut} \quad [J/s]$$

som med antagelsen om konstant varmekapasitet c_p gir

$$mc_p \frac{dT}{dt} = wc_p(T_{inn} - T)$$

Vi forkorter bort c_p og omformer ligningen

$$\frac{m}{w} \frac{dT}{dt} = -T + 1 \cdot T_{inn}$$

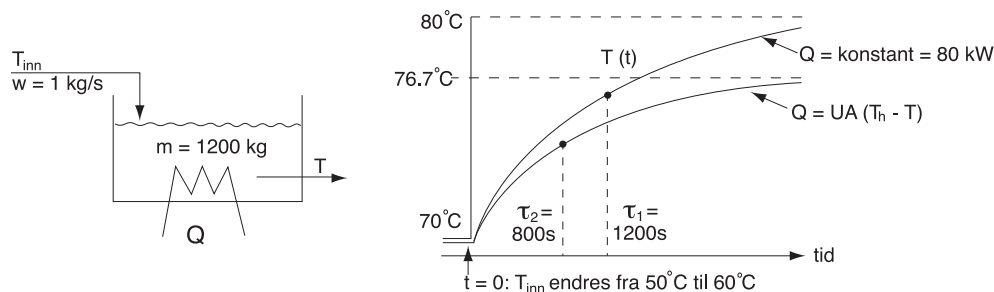
Med $y = T$ og $u = T_{inn}$ ser vi at denne er på standard form (11.21) med

$$\tau = \frac{m}{w} = \frac{\rho V}{w} = \frac{1000 \cdot 1.2}{1} = 1200 \text{ s}; \quad k = 1$$

Det vil med andre ord ta $\tau = 1200 \text{ s} = 20 \text{ min}$ før utstrømmens temperatur er 56.3°C (det vil ta uendelig lang tid før den er 60°C).

Merk at tidskonstanten er lik oppholdstiden. Det er typisk for endringer i både konsentrasjon og temperatur for en blandetank uten reaksjon eller oppvarming.

Eksempel 11.6 Temperaturdynamikk i blandetank med varmeveksling.



Figur 11.10: Blandetank med oppvarming

Betrakt samme eksempel som over, men anta at det tilføres varme i tanken (se Figur 11.10) slik at temperaturen T i tanken er 70°C (stasjonært). Innløpstemperaturen endres sprangvis fra 50°C til 60°C . Vi skal se på responsen og bestemme tidskonstanten for følgende to tilfeller

1. Oppvarmingen skjer med elektrisk effekt slik at Q er uavhengig av temperaturen T i tanken.
2. Oppvarmingen beskrives ved ligningen $Q = UA(T_h - T)$ der Q er tilført varme og T_h er temperaturen på varmemediet som antas konstant lik 110°C .

Løsning. Energibalansen (11.12) kan i dette tilfellet skrives [J/s]

$$mc_p \frac{dT}{dt} = wc_p(T_{\text{inn}} - T) + Q$$

Fra den stasjonære balansen har vi nominelt (før spranget i T_{inn}) at

$$Q = -wc_p(T_{\text{inn}} - T) = -1 \text{ kg/s} \cdot 4000 \text{ J/kg K} \cdot (50 - 70)\text{K} = 80000 \text{ J/s} = 80 \text{ kW}$$

1. For tilfellet der Q er uavhengig av T gir omforming til standard form (11.21) at tidskonstanten er $\tau = m/w = 1200 \text{ s}$ (oppholdstiden), og at forsterkningen fra T_{inn} til T er $k = 1$, dvs. den stasjonære temperaturstigningen i tanken er 10°C .
2. For tilfellet der Q avhenger av T blir energibalansen

$$mc_p \frac{dT}{dt} = wc_p(T_{\text{inn}} - T) + UA(T_h - T) \quad (11.34)$$

og omforming til standard form (11.21) gir

$$\tau = \frac{mc_p}{wc_p + UA}; \quad k = \frac{wc_p}{wc_p + UA}$$

Tidskonstanten τ og forsterkningen k er begge noe mindre enn tidligere. Årsaken er at varmevekslingen motvirker temperaturendringen slik at den "holder igjen" endringen.

For å bestemme de numeriske verdier må vi kjenne verdien av UA . Vi har at $UA = Q/(T_h - T)$, og fra de nominelle stasjonærdata finner vi at $UA = 80 \cdot 10^3 / (110 - 70) = 2000$ W/K. Tidskonstanten og forsterkningen blir

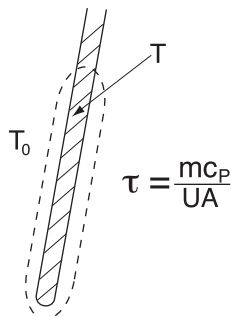
$$\tau = \frac{mc_p}{wc_p + UA} = \frac{1200 \cdot 4000}{1 \cdot 4000 + 2000} = 800 \text{ s}; \quad k = \frac{4000}{4000 + 2000} = 0.67$$

dvs. temperaturen øker kun med 6.7°C (mens den i tilfellet uten varmeveksling økte med 10°C).

Vi har med andre ord funnet at med Q uavhengig av T (Q lik 0 eller lik 80 kW) er forsterkningen $k = 1$ og tidskonstanten $\tau = 1200$ s, mens for tilfellet der Q er en funksjon av T er forsterkningen $k = 0.67$ og tidskonstanten $\tau = 800$ s.

Men vi merker oss at $k/\tau = 1/1200$ er lik i de to tilfellene, og siden (11.25) gir at $\lim_{t \rightarrow 0} \Delta T'(t) = (k/\tau) \cdot \Delta T_{\text{inn}}$, betyr dette at den initielle responsen er lik (se også Figur 11.10). Dette er rimelig fra fysiske betraktninger, siden den "motvirkende" effekten fra varmevekslingen først kommer inn i bildet etter at tanktemperaturen har begynt å endre seg.

Eksempel 11.7 Respons av termoelement i kaffekopp



Figur 11.11: Termoelement

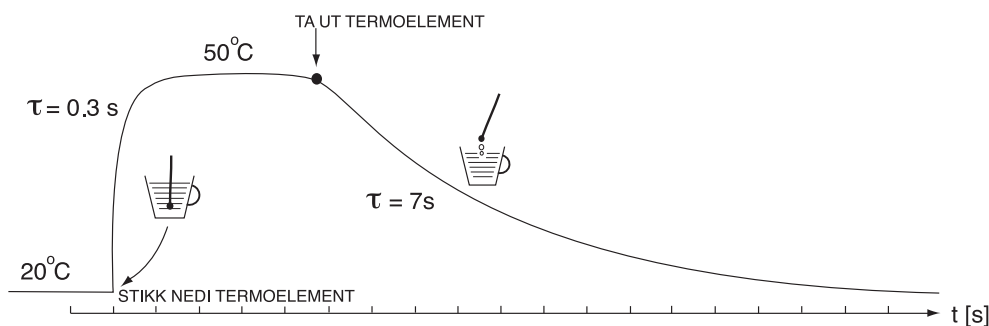
Temperatur måles vanligvis ved bruk av et termoelement basert på det faktum at elektriske egenskaper påvirkes av temperaturen. Vi skaffer oss et termoelement og en kaffekopp og utfører følgende forsøk:

1. Vi holder initielt termoelementet i luften (slik at termoelementets temperatur er lik luftens temperatur).
2. Vi stikker termoelementet ned i kaffen (og holder det der lenge nok til at termoelementets temperatur er lik kaffens temperatur)
3. Vi tar det ut av kaffen igjen (temperaturen vil igjen nærme seg luftens temperatur – og kan endog midlertidig bli lavere pga. varme som avgis til fordampning av gjenværende kaffedråper).

Oppgave 1. Hva skjer? (Skisser forventet temperaturrespons) Resultatet av et virkelig forsøk utført av forfatteren er vist i Figur 11.12.

Vi ser at responsene ligner mye på standard 1.ordens responser. Men det mest iøynefallende er at responsen er mye raskere når vi stikker termoelementet ned i kaffen (tidskonstant ca. 0.3 s) enn når vi tar den ut igjen (tidskonstant ca. 7s).

Oppgave 2. Kan du forklare dette? (Formulér en dynamisk modell og bestem et analytisk uttrykk for tidskonstanten).



Figur 11.12: Kaffeforsøk

Siden vi er ute etter temperaturresponsen, må vi formulere en energibalanse, og siden det er termoelementets temperatur vi skal betrakte, må energibalansen tas rundt termoelementet. Den generelle energibalansen er gitt i (11.12). Siden det ikke er noen strømmer er $H_{\text{inn}} - H_{\text{ut}} = 0$. Det er heller ikke noe akselarbeid ($W_s = 0$), og bidrag fra "trykk-volum-endringer" kan neglisjeres. Energibalansen (11.12) rundt termoelementet blir da

$$\frac{dH}{dt} = Q$$

Her er $dH/dt = mc_p dT/dt$ der m er massen av termoelementet. Tilført varme til termoelementet fra omgivelsene er

$$Q = UA(T_o - T)$$

Energibalansen blir

$$mc_p \frac{dT}{dt} = UA(T_o - T) \quad (11.35)$$

der

- T - temperatur termoelement [K]
- T_o - temperatur omgivelser (kaffe eller luft) [K]
- m - masse termoelement [kg]
- $c_p(T)$ - spesifikk varmekapasitet termoelement [J/kg K]
- A - areal termoelement [m^2]
- U - varmegjennomgangskoeffisienten fra omgivelsene til termoelementet [$W/m^2 K$]

Stasjonært er $dT/dt = 0$, og vi har som forventet at $T = T_o$ når systemet har falt til ro. (11.35) kan omskrives til

$$\frac{mc_p}{UA} \frac{dT}{dt} = T_o - T$$

som med $y = T$ og $u = T_o$ er på standard form (11.21)

$$\tau = \frac{mc_p}{UA}; \quad k = 1 \quad (11.36)$$

Etter et sprang i omgivelsenes temperatur T_o , vil altså, som bekreftet av eksperimentet, termoelementets temperatur T eksponentielt (med tidskonstant τ) nærme seg T_o .

En del kommentarer:

1. Tidskonstanten er uavhengig av temperaturene T og T_o (dette er ikke umiddelbart opplagt for en som ikke kan noe om prosessdynamikk).

2. Tidskonstanten τ er konstant dersom c_p og U antas konstante (dette synes å være en rimelig antagelse for hvert delforsøk).
3. Tidskonstanten er $7/0.3 = 23$ ganger større når termoelementet tas ut av kaffen. Dette skyldes at varmeoverføringen er mye bedre (og verdien av U er mye høyere) når termoelementet er i kaffe enn når termoelementet er i luft (ut fra forsøket er forskjellen i U en faktor 23).
4. Generelt ønsker vi så raske målinger som mulig, dvs. tidskonstanten τ ønskes liten. Dette oppnås ved å redusere termoelementets varmekapasitet mc_p [J/K], og ved å sørge for god varmeoverføring slik at UA [W/K] er stor. For å beskytte termoelementet, plasseres det i en kappe, noe som er ugunstig fordi det øker massen m og også reduserer U . Vi kan motvirke dette ved å velge et materiale i kappen med liten varmekapasitet (men samtidig med god ledningsevne) og utforme kappen slik at det ytre arealet A blir så stort som mulig.

Som de gode ingeniører vi er, er vi meget spente på å sammenligne resultatene av forsøket med teoretiske beregninger. Termoelementet som ble benyttet er sylindrisk, dvs.

$$\frac{V}{A} = \frac{(\pi/4)D^2 L}{\pi DL} = \frac{1}{4}D$$

og vi antar at $D = 1.6 \text{ mm}$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ og $c_p = 800 \text{ J/kg K}$ (aluminium). Vi kan fra (11.36) beregne varmegjennomgangstallet U (SI-enheter):

$$U = \frac{V\rho c_p}{A\tau} = \frac{1}{4} \frac{D\rho c_p}{\tau} = \frac{864}{\tau}$$

og innsatt $\tau = 7 \text{ s}$ (luft) og $\tau = 0.3 \text{ s}$ (kaffe, dvs. vann) finner vi eksperimentelt at $U = 123 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ (luft) og $U = 2880 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ (vann). Dette virker umiddelbart høyt siden det ligner på verdier vi har i varmevekslere med tvungen konveksjon. La oss nå sammenligne med de teoretiske verdier for egenkonveksjon til luft og vann. For egenkonveksjon gjelder¹ at $Nu = 0.5(Gr \cdot Pr)^{0.25}$, som innsatt for de dimensjonsløse grupper Nu , Gr og Pr kan omordnes til

$$h = 0.5 \left(\frac{k^3 c_p \rho^2 g \beta}{\mu} \right)^{0.25} \cdot \left(\frac{\Delta T}{D} \right)^{0.25}$$

Vi antar følgende fysiske data

$$\begin{aligned} \text{Luft :} \quad & k = 0.027 \frac{\text{W}}{\text{K m}}; c_p = 1000 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}; \mu = 1.8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}; \rho = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \beta = \frac{1}{T} = 0.003 \frac{1}{\text{K}} \\ \text{Vann :} \quad & k = 0.7 \frac{\text{W}}{\text{K m}}; c_p = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}; \mu = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}; \rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \beta = 0.001 \frac{1}{\text{K}} \end{aligned}$$

og vi finner for egenkonveksjon (SI-enheter)

$$\begin{aligned} \text{Luft :} \quad & h = 1.31 \cdot \left(\frac{\Delta T}{D} \right)^{0.25} \\ \text{Vann :} \quad & h = 173 \cdot \left(\frac{\Delta T}{D} \right)^{0.25} \end{aligned}$$

Bruker vi $D = 10^{-3} \text{ m}$ og $\Delta T = 10 \text{ K}$ (midlere temperaturdifferanse; den eksakte verdien er ikke så viktig siden den opphøyes i potens 0.25) fås $\left(\frac{\Delta T}{D} \right)^{0.25} = 10$ (SI-enheter) og antas $U \approx h$ (dvs. antar meget rask varmeledning i termoelementet) estimerer vi teoretisk at $U = 13.1 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ (luft) og $U = 1730 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ (vann). Vi ser at den teoretiske U -verdien

¹ For mer detaljer om dette og generelt om modellering og balanseligninger for mer kompliserte systemer se: R.B. Bird, W.E. Stewart and E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Wiley, 1960.

for vann ($1730 \text{ W/m}^2 \text{ K}$) stemmer bra med den eksperimentelle ($2880 \text{ W/m}^2 \text{ K}$), mens den teoretiske U -verdien for luft ($13.1 \text{ W/m}^2 \text{ K}$) er mye lavere enn den eksperimentelle ($123 \text{ W/m}^2 \text{ K}$) estimert fra forsøket. Årsaken er sannsynligvis det gjenværende vannet på termoelementet som fordampes og forbedrer varmeoverføringen når vi løfter termoelementet ut av kaffen.

Eksempel 11.8 Dynamikk for oppvarming av kokeplate. La oss betrakte en kokeplate med masse $m = 1 \text{ kg}$ og spesifikk varmekapasitet $c_p = 0.5 \text{ kJ/kg K}$. Kokeplaten tilføres en effekt på $Q_1 = 2000 \text{ W}$, og varmetapet fra kokeplaten er gitt ved $UA(T - T_o)$ hvor T er kokeplatenes temperatur, $T_o = 290 \text{ K}$ er omgivelsenes temperatur, $A = 0.04 \text{ m}^2$ og U er varmegjennomgangskoeffisienten. Vi finner at $T \rightarrow 1000 \text{ K}$ når $t \rightarrow \infty$. Hva er tidskonstanten for oppvarmingen av kokeplaten (definert som den tid det tar for å oppnå 63% av temperaturendringen)?

Løsning. Dette er et lukket system uten massestrømmer og akselarbeid, og for et fast stoff (kokeplaten) kan vi neglisjere energi relatert til trykk-volum-enderinger. Energibalansen (11.12) rundt kokeplaten (systemet) gir

$$\frac{dH}{dt} = Q$$

Her er det to bidrag til tilført varme Q , nemlig fra elektrisk effekt og fra varmetap, dvs.

$$Q = Q_1 - UA(T - T_o)$$

Entalpien til kokeplaten er kun en funksjon av temperaturen, dvs. $dH/dt = mc_p dT/dt$. Energibalansen blir

$$mc_p \frac{dT}{dt} = Q_1 - UA(T - T_o) \quad (11.37)$$

For å bestemme varmegjennomgangskoeffisienten U , brukes opplysningen om at i stasjonær tilstand er $T^* = 1000 \text{ K}$. Den stasjonære energibalansen $0 = Q_1 - UA(T^* - T_o)$ gir da

$$U = \frac{Q_1}{A(T^* - T_o)} = \frac{2000}{0.04(1000 - 290)} = 70.4 \quad [\text{W/m}^2 \text{ K}]$$

Vi vil anta at U er konstant under oppvarmingen (som neppe er riktig men vi har ikke noe annet å gå ut fra). Den dynamiske energibalansen (11.37) er da en lineær 1.ordens differensialligning som kan skrives på standard form

$$\tau \frac{dT}{dt} = -T + ku \quad (11.38)$$

hvor

$$\tau = \frac{mc_p}{UA} = 177.5 \text{ s}$$

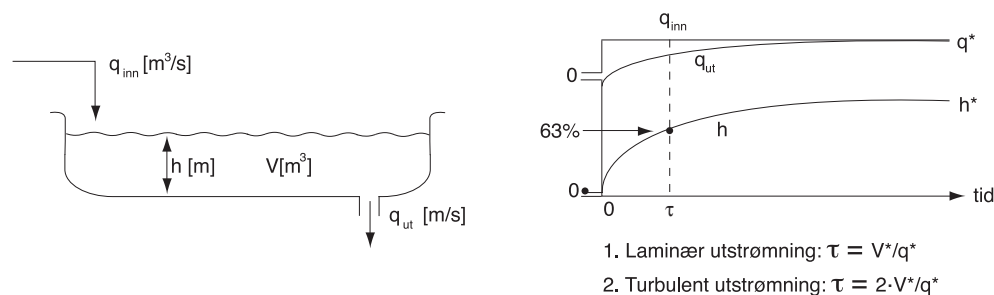
(merk at vi får samme uttrykk for tidskonstanten som for termoelementet i Eksempel 11.7) og

$$ku = \underbrace{\frac{1}{UA}}_{k_1} \underbrace{Q_1}_{u_1} + \underbrace{1}_{k_2} \cdot \underbrace{T_o}_{u_2}$$

Vi finner med andre ord at det tar tiden $t = \tau = 177.5 \text{ s}$ (ca. 3 min) for å oppnå 63% av endringen i kokeplatenes temperatur.

Eksempel 11.9 Massebalanse for fylling av badekar uten propp.

Vi betrakter her dynamikken for volumet (nivået) i et badekar uten propp. Eksemplet kan også beskrive dynamikken for utstrømmingen fra en tank eller endringen i vannstanden i en



Figur 11.13: Badekar uten propp

innsjø som følge av et regnfall. Vi betrakter et rektangulært badekar med væskevolum $V = Ah$ der $A [m^2]$ er karetts grunnflate og $h [m]$ er væskehøyden. Vi antar at tettheten ρ er konstant.

Kontrollvolumet (grenseflaten) for systemet er hele badekaret, og beholdningen av massen $m = \rho V [kg]$. Masse er en konserverert størrelse, og vi har fra (11.3) at

$$\frac{dm}{dt} = w_{inn} - w_{ut} \quad [kg/s] \tag{11.39}$$

og med antagelsen om konstant tetthet får vi “volumbalansen”

$$\frac{dV}{dt} = q_{inn} - q_{ut} \quad [m^3/s] \tag{11.40}$$

Denne ligningen beskriver altså volumendringen i et badekar som fylles eller tømmes. Med proppen i har vi at $q_{ut} = 0$, og prosessen er “rent integrerende”, dvs. det er ingenting som motvirker økningen i V .

Men vi skal her betrakte tilfellet der proppen er ute. Vi har da at q_{ut} er en funksjon av mengde vann i badekaret, dvs. q_{ut} øker når væskehøyden h øker. Vi har fra den statiske impulsbalansen (mekaniske energibalansen):²

- 1. Laminær strømning utløp: $q_{ut} = k_l h$
- 2. Turbulent strømning utløp: $q_{ut} = k_t \sqrt{h}$

Sannsynligvis er strømningsbildet turbulent, men la oss for enkelthets skyld anta laminær strømning.

1. Laminær strømning. Innsatt $V = Ah$ blir “volumbalansen”

$$\frac{d(Ah)}{dt} = A \frac{dh}{dt} = q_{inn} - k_l h \quad [m^3/s] \tag{11.41}$$

Dette er en 1.ordens differensialligning i $h(t)$ som kan omordnes til standard form

$$\tau \frac{dh}{dt} = -h + k \cdot q_{inn}$$

med $\tau = A/k_l$ og $k = 1/k_l$. Løsningen er

$$h(t) = \frac{1}{k_l} \left(1 - e^{-\frac{k_l t}{A}} q_{inn} \right) \tag{11.42}$$

² Strømningen ut av badekaret drives av trykkfallet over utløpet som er ρgh , og dette er lik friksjonstrykkfallet Δp_f . Men fra strømningsmekanikken (se side 209) er $\Delta p_f \sim q$ for laminær strømning og $\Delta p_f \sim q^2$ for turbulent strømning, og det følger at $q \sim h$ (laminær) og $q \sim \sqrt{h}$ (turbulent).

Vi finner at $h(t)$ øker med tiden, mest til å begynne med, men så gjør det økte nivået at mer begynner å renne ut, økningen stopper opp, og vi kommer til slutt (for $t \rightarrow \infty$) til et balansepunkt (stasjonært punkt) hvor $q_{ut}^* = q_{inn}$ og h ikke lenger øker. Den nye stasjonære verdien, h^* , kan bestemmes ved å sette inn $t = \infty$. Eksponentialleddet er da 0 og (11.42) gir

$$h^* = h(\infty) = \frac{q_{inn}}{k_l} \quad (11.43)$$

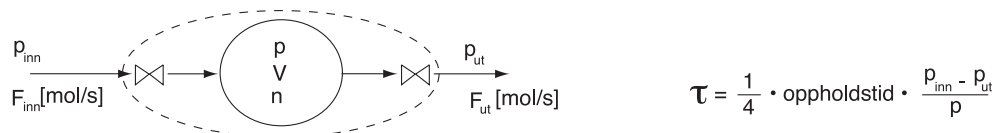
- Vi kan alternativt utlede (11.43) ved å ta utgangspunkt i den stasjonære massebalansen som gir $q_{inn} = q_{ut}$ [m^3/s]. Her er $q_{ut} = k_l h$ og (11.43) følger.
- Tidskonstanten er $\tau = A/k_l$. Her er den stasjonære strømmengden $q^* = k_l h^* (= q_{ut} = q_{inn}^*)$, dvs. $k_l = q^*/h^*$, og det følger at

$$\tau = \frac{A}{k_l} = \frac{Ah^*}{q^*} = \frac{V^*}{q^*}$$

som er lik oppholdstiden i det fylte badekaret. (Men for at du ikke skal tro at tidskonstanten alltid er lik oppholdstiden, kan det nevnes at for turbulent strømming er tidskonstanten lik det dobbelte av oppholdstiden; dette vises på side 262 ved linearisering av leddet $k_l \sqrt{h}$, der faktoren 2 kommer fra at $d\sqrt{h}$ er $\frac{1}{2\sqrt{h}} dh$).

Følgende eksempel illustrerer at dynamikken i gass-systemer vanligvis er meget rask. Dette skyldes primært at oppholdstiden vanligvis er liten, men det forsterkes ytterligere ved at de relative trykkforskjellene vanligvis er meget små.

Eksempel 11.10 Gassdynamikk. En tank vurderes benyttet til å jevne ut trykk- og mengdevariasjoner i en gassledning. Utled de dynamiske ligninger og bestem tidskonstanten for trykkdynamikken. Vi antar at strømmingen inn og ut av tanken er beskrevet ved $F_{inn} = c_1(p_{inn} - p)$ [mol/s] og $F_{ut} = c_2(p - p_{ut})$ [mol/s] der de to "ventilkonstantene" c_1 og c_2 antas like (og lik c).



Figur 11.14: Gassdynamikk

Løsning. Massebalansen blir [mol/s]

$$\frac{dn}{dt} = F_{inn} - F_{ut}$$

Vi antar konstant volum V og ideell gass,

$$n = \frac{pV}{RT}$$

Massebalansen blir da

$$\frac{V}{RT} \frac{dp}{dt} = c(p_{inn} - p) - c(p - p_{ut})$$

Denne ligningen kan brukes til å beregne p som funksjon av p_{inn} og p_{ut} . Omformet til standard form (11.21) ser vi at tidskonstanten er

$$\tau = \frac{V}{2cRT} = \frac{n}{2cp} \quad (11.44)$$

Fra den stasjonære massebalansen får $p^* = (p_{\text{inn}}^* + p_{\text{ut}}^*)/2$ som gir

$$F^* = F_{\text{inn}}^* = F_{\text{ut}}^* = c \cdot \frac{p_{\text{inn}}^* - p_{\text{ut}}^*}{2}$$

Kombinert med (11.44) gir dette tidskonstanten i det nominelle driftspunkt (stasjonært tilstanden):

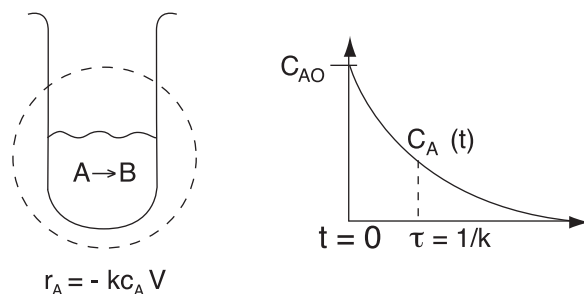
$$\tau = \frac{n^*}{2cp^*} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n^*}{F^*} \cdot \frac{p_{\text{inn}} - p_{\text{ut}}}{p} \quad (11.45)$$

dvs. tidskonstanten er $1/4$ av oppholdstiden, n/F , multiplisert med den relative trykkforskjellen, $(p_{\text{inn}} - p_{\text{ut}})/p$. For gasssystemer er vanligvis begge disse leddene små, og dette forklarer hvorfor trykkdynamikken vanligvis er meget rask. For eksempel, med $p_{\text{inn}} = 10.1$ bar, $p = 10$ bar og $p_{\text{ut}} = 9.9$ bar får vi

$$\tau = \frac{1}{4} \cdot \frac{n^*}{F^*} \cdot \frac{10.1 - 9.9}{10} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{n^*}{F^*}$$

dvs. tidskonstanten for trykkdynamikken i tanken er kun $1/200$ av (den lille) oppholdstiden.

Eksempel 11.11 1.ordens reaksjon i satsreaktor (begerglass)



Figur 11.15: Reaksjon i begerglass

Betrakt et begerglass der komponenten A dekomponerer ved en 1.ordens irreversibel reaksjon $A \rightarrow B$. Utled ligningen som beskriver konsentrasjonsdynamikken når temperaturen antas konstant.

Løsning. Det er ingen strømmer ut og inn av begerglasset, og komponentbalansen for begerglasset blir [mol A/s]

$$\frac{d(c_A V)}{dt} = r_A V \quad (11.46)$$

der r_A er reaksjonshastigheten for "dannelse" av komponent A , som for en 1.ordens reaksjon er $r_A = -kc_A$ [mol A / m³ s], der k [s⁻¹] er konstant siden temperaturen er konstant. Hvis vi i tillegg neglisjerer endringer i volumet, får vi

$$\frac{dc_A}{dt} = -kc_A \quad (11.47)$$

som gir en 1.ordens respons $c_A(t) = c_A(0)e^{-t/\tau}$ med tidskonstant $\tau = 1/k$ (merk at k her er hastighetskonstanten og ikke forsterkningen). Vi merker oss at $c_A \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$, dvs. stasjonær tilstand er at alt har reagert.

Kommentar. Dette er en satsvis prosess, så systemet er ikke initielt i en stasjonær tilstand. Dette er imidlertid ikke noe krav, og (11.47) kan løses når vi kjenner initialkonsentrasjonen $c_A(0)$ ved forsøkets start.

Øving 11.2 Fordamper Studér igjen fordamperen i eksempel 11.2. Hva blir tidskonstanten for temperaturresponsen? (Svar. $\tau = mc_{pL}/wc_{pV}$ som er noe større enn oppholdstiden siden $c_{pL} > c_{pV}$; for vann er $c_{pL}/c_{pV} \approx 2.2$.)

Øving 11.3 1.ordens reaksjon i blandetank Betrakt en blandetank (CSTR) der komponenten A dekomponerer ved en 1.ordens irreversibel reaksjon $A \rightarrow B$ med reaksjonshastighet $r = (-r_A) = kc_AV$ [mol A/s]. Føden har konsentrasjon $c_{A,F}$. Utleid ligningen som beskriver konsentrasjonsdynamikken når temperaturen antas konstant og bestem tidskonstanten og forsterkningen for responsen. (Merk at k her er hastighetskonstanten og ikke forsterkningen.)

(Svar. Tidskonstant $\tau = V/(q+kV)$. Forsterkning fra $c_{A,F}$ til c_A er $q/(q+kV)$. Vi merker oss at reaksjonen “holder igjen” (motvirker) økningen i konsentrasjonen.)

11.3.4 Tidsrespons for mer kompliserte systemer

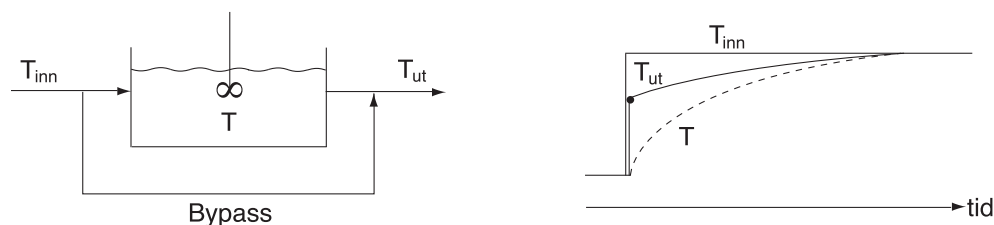
I forgående avsnitt har vi inngående betraktet sprangresponsen for systemer med kun 1 differensialligning som kan skrives på “standard” form $\tau dy(t)/dt = -y(t) + k u(t)$. Dette ga opphav til en 1.ordens respons. Selv om mange systemer kan skrives (eller approksimeres) på denne formen, må det understrekes at verden generelt er langt mer komplisert.

- Selv for systemer med kun 1 lineær differensialligning kan responsen være mer komplisert enn det som er beskrevet over; enten fordi systemet er ulineært, eller fordi responsen har et “direkteledd”, dvs. kan skrives på formen

$$\tau dx(t)/dt = -x(t) + ku(t); \quad y(t) = c \cdot x(t) + d \cdot u(t)$$

der c og “direkteleddet” d er konstanter (f.eks. se Figur 11.16 som viser responsen til en blandetank med bypass).

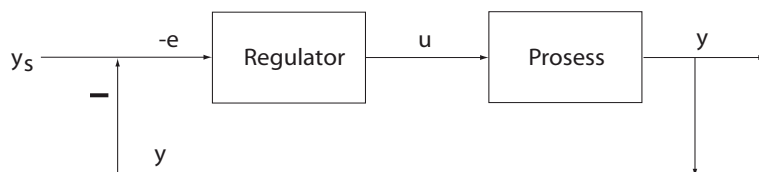
- Hvis vi har to 1.ordens systemer i serie, f.eks. to blandetanker, blir totalsystemet 2.ordens, og har vi n 1.ordens systemer i serie, blir totalresponsen n 'te ordens. Responsen for slike høyere ordens systemer blir vanligvis “flatere” (se Figur 11.22).
- Vi får også høyere ordens respons dersom modellen består av flere koblede differensialligninger, f.eks. en adiabatisk reaktor med koblet material- og energibalanse (se Figur 11.24).



Figur 11.16: Temperaturrespons for blandetank med *bypass*

En analytisk beregning av tidsresponsen for høyere ordens systemer blir komplisert, og det finnes ofte ikke en analytisk løsning. Ved å linearisere systemet, som diskutert i neste avsnitt (Kap. 11.4), kan man bruke en rekke slagkraftige matematiske teknikker for å analysere systemet, f.eks. beregning av systemets “poler” (egenverdi = $-1/\text{tidskonstant}$) og “nullpunkter”. Det viktigste redskapet for å analysere mer kompliserte systemer er i praksis “dynamisk simulering”, dvs. numerisk løsning av ligningene. Dette diskuteres i Kapittel 11.5.

11.6 Prosessregulering



Figur 11.28: Blokkdiagram for regulering med tilbakekobling

Vi avslutter kapitlet med et lynkurs i innstilling av regulatorer. Automatisk regulering med tilbakekobling (*feedback control*) er svært mye brukt i prosessindustrien, og instrumenterings- og reguleringsystemet utgjør typisk 30% av anleggsinvesteringene. For hver viktige prosessvariabel man ønsker å regulere trenger man

- en måling av prosessvariabelen (“utgangen” y),
- en uavhengig variabel (vanligvis en ventil) (“pådraget” u) som påvirker prosessvariabelen.

Pådraget u bør ha en mest mulig “direkte” påvirkning på utgangen y (rask dynamikk, helst uten dødtid eller inversrespons). Pådraget u justeres slik at utgangen y går mot ønsket settpunktverdi y_s , dvs. slik at avviket $e = y - y_s$ blir så lite som mulig. Hovedprinsippet ved negativ tilbakekobling er at pådraget u endres slik at det *motvirker* endringer i utgangen y – dette er vist med det negative fortegnet i sløyfen i figur 11.28 (hvor det er antatt at blokkene “prosess” og “regulator” har samme fortegn). En velkjent regulator fra dagliglivet er av/på-regulatoren som brukes i termostater (der varmemengden er pådrag og temperatur er utgang). Av/på-regulatoren er enkel, men gir kraftige pådragsvariasjoner (mellom max og min) og svingninger. I prosessindustrien brukes oftest *proporsjonal-integral-derivat* (PID)-regulatoren med algoritmen

$$u(t) = u_0 - K_c \left(e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t) dt + \tau_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (11.53)$$

Vi ser at pådragsendringen $u - u_0$ er en vektet sum av nåverdien av avviket e (P-virkningen), integralet av avviket (I-virkningen) og derivatet av avviket (D-virkningen). PID-regulatoren har tre parametere:

- Forsterkning K_c
- Integraltid τ_I [s]
- Derivattid τ_D [s]

Proporsjonal-leddet er vanligvis det viktigste og en stor verdi av K_c gir en raskere initiell respons. Bruk av integralvirkningen gjør at pådraget u vil endres inntil feilen $e(t)$ er null, dvs. vi unngår stasjonæravvik. En liten verdi av integraltiden τ_I [s] gjør at regulatoren raskere bringer feilen tilbake til null. Hovedproblemet med tilbakekobling er at vi kan få ustabilitet hvis vi overreagerer (hvis K_c er for stor eller τ_I er for liten) slik at vi får svingninger som vokser over tid. Derivatvirkningen kan gi raskere respons for enkelte prosesser, men deriveringen gir ofte “urolig regulering” med stor følsomhet for målestøy. Derfor brukes vanligvis en PI-regulator (med $\tau_D = 0$).

Det finnes også andre varianter av PID-regulatoren, for eksempel kaskadeformen, men forskjellen er vanligvis liten for praktisk bruk. Man bør imidlertid være mer oppmerksom på at leverandørene kan bruke ulike navn og definisjoner på de tre PID-parametrene. For eksempel, bruker mange integralforsterkningen $K_I = K_c/\tau_I$ og derivatforsterkningen

$K_D = K_c \tau_D$. Andre bruker “proportional band” som er lik $100/K_c$, og “reset rate” som er lik $1/\tau_I$. Integraltiden kalles ofte “reset time”.

On-line innstilling. Det er ikke alltid enkelt å finne gode regulatorparametere, og den mest vanlige (og alvorlige) feilen er å bruke feil fortegn på K_c . Innstillingen (“tuningen”) av regulatorparameterene gjøres ofte “on-line” med prøve-og-feile-metoden. Man begynner da vanligvis med å øke K_c gradvis inntil enten (a) reguleringsavviket ved forstyrrelser og settpunktsendringer er akseptabelt, (b) pådragsbruken blir for stor, eller (c) systemet begynner å svinge. Hvis systemet begynner å svinge, så reduseres K_c med ca. en faktor 2 eller mer i forhold til verdien som ga svingning. Så reduserer man gradvis integraltiden τ_I inntil (a) innsvingnings-hastigheten tilbake til settpunktet er rask nok eller (b) systemet begynner å svinge. Hvis systemet begynner å svinge, så økes τ_I med ca. en faktor 2 eller mer i forhold til verdien som ga svingning. Hvis responsen er for langsam kan man til slutt øke derivattiden τ_D inntil (a) pådragsbruken blir for urolig eller (b) systemet begynner å svinge. Hvis systemet begynner å svinge, så reduseres τ_D med ca. en faktor 2 eller mer i forhold til verdien som ga svingning.

Modellbasert innstilling for rask respons. Alternativt brukes modellbasert innstilling. Ofte tilnærmes responsen fra pådraget u til utgangen y som en 1.ordens prosess med dødtid med parametere k , τ og θ (se side 246), og Skogestads PI-innstillinger anbefales:⁴

$$K_c = \frac{1}{k} \frac{\tau}{\tau_c + \theta}; \quad \tau_I = \min\{\tau, 4(\tau_c + \theta)\} \quad (11.54)$$

Her er “closed-loop” responstid τ_c [s] en fri tuningparameter, og en lavere τ_c gir raskere respons, men større pådragsbruk. For å unngå svingninger og holde en god margin til ustabilitet, anbefales det å velge τ_c større enn den effektive dødtiden, dvs. $\tau_c \geq \theta$. Hvis man ønsker rask respons velges $\tau_c = \theta$.

Hvis responsen er dominerende 2.ordens kan man av og til få en stor forbedring ved å legge til derivatvirkning, forutsatt at det ikke er for mye målestøy. Man approksimerer responsen da som en 2.ordens prosess med dødtid med parametere k , τ , τ_2 og θ . For en PID-regulator på *kaskadeform* blir da K_c og τ_I som gitt i (11.54) (men merk at parameterverdiene vil endres fordi θ blir mindre når vi approksimerer med 2.ordens prosess) og derivattiden blir

$$\tau_D = \tau_2 \quad (11.55)$$

Faktoren $\alpha = 1 + \tau_D/\tau_I$ er ofte nær 1, men hvis ikke må man korrigere parametrene litt for å bruke den den “ideelle” PID-formen i (11.53). Dette gjøres ved å multiplisere K_c og τ_I med α , og dele τ_D med α .

Konservativ innstilling for rolig respons. Tuningprosessen over er ofte tidkrevende, og som utgangspunkt kan brukes følgende minimum (“konservative”) forsterkning⁵

$$|K_{c,min}| = \frac{|u_0|}{|y_{max}|} \quad (11.56)$$

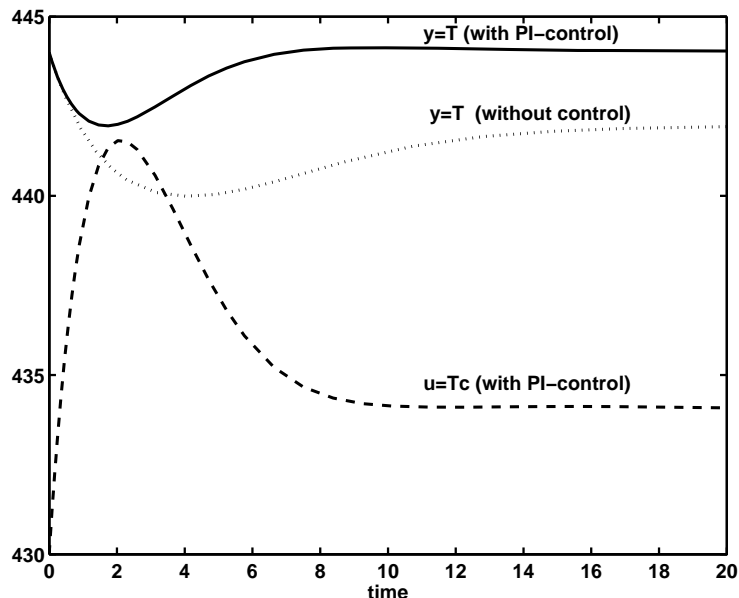
hvor $|u_0|$ er pådragsendringen som kreves for å motvirke den største forventede forstyrrelsen og $|y_{max}|$ er det største aksepterte reguleringsavviket. Ofte er variablene allerede skalert slik at $|u_0| \approx |y_{max}|$ (f.eks. lik 1) og vi har $|K_{c,min}| = 1$. Dette er en vanlig fabrikk-verdi på forsterkningen. I tillegg er det avgjørende at fortegnet velges riktig – husk at reguleringen skal motvirke og ikke forsterke endringer. Som et konservativt utgangspunkt for integraltiden kan velges $\tau_I = \tau$ der τ er den dominerende tidskonstanten for pådraget u 's effekt på utgangen y .

⁴ S. Skogestad, “Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning”, *J. Process Control*, Vol. 13 (2003), 291-309.

⁵ S. Skogestad, “Tuning for smooth PID control with acceptable disturbance rejection,” *Ind. Eng. Chem. Res.*, Vol. 45, 7817-7822 (2006)

Eksempel 11.20 Regulering av eksoterm CSTR. Vi ønsker å holde reaktortemperaturen $y = T$ konstant og lik $y_s = 444\text{K}$ for den eksoterme blandetanksreaktoren (CSTR) i Eksempel 11.17 (side 271). Vi antar at reaktortemperaturen kan måles og bruker tilbakekobling med kjøletemperaturen $u = T_c$ som pådrag. Vi betrakter som før responsen til en økning i fødemengden på 20% (fra 0.10 til 0.12 m³/min) – dette kan betraktes som en forstyrrelse på prosessen. Uten regulering får vi at reaktortemperaturen T etter hvert synker til 441.9 K, men med PI-regulering vil pådraget motvirke forstyrrelsen slik at T går tilbake til den ønskede verdien på 444 K; se Figur 11.29.

For å innstille har vi benyttet responsen fra kjøletemperatur (pådrag u) til reaktortemperatur (utgang y). Dette viser seg å være er en standard 1.ordens respons (uten inversrespons eller dødtid) med forsterkning $k = \Delta y / \Delta u \approx 0.5$ og tidskonstant $\tau \approx 7$ min. Dette finnes enklest ved å simulere et lite sprang i T_c (f.eks. endre T_c fra 430 til $T_c=431$ og sette $q=0.1$ i Matlab-koden på side 271), men kan også finnes analytisk ved å linearisere modellen. Med valgt responstid $\tau_c = 3$ min (lavere verdier gir raskere respons, men større endringer i pådraget T_c), gir (11.54) at $K_c = 4.7$ og $\tau_I = \min\{7, 12\} = 7$ min.



Figur 11.29: Eksoterm CSTR: Temperaturrepons etter sprang i strømningsmengde

Simuleringen med regulering i Figur 11.29 er utført ved å legge til følgende linjer etter punkt II i Matlab-koden på side 271:

```
% PI-CONTROLLER: u = u0 - Kc*e - (Kc/taui)*eint, where deint/dt = e
% Note: (1) The integrated error eint is introduced as an extra state: eint = y(4)
%        (2) The process "output" yreg is in this case the reactor temperature T
%        (3) The process "input" u is in this case the cooling temperature Tc
yreg = T; yregs= 444; e=yreg-yregs; u0 = 430; eint=y(4); Kc=4.7; taui=7;
u = u0 - Kc*e - (Kc/taui)*eint;
Tc = u;
```

samt ved å endre siste linje til: `DYDT=[f1; f2; f3; e];`. Den endrede koden er lagret i filen `cstrTpi.m` og kjøres ved å skrive:

```
[T,Y]= ode15s(@cstrTpi,[0 50],[2274 7726 444.0 0]);.
```

11.7 Oppsummering

Typisk inngår følgende trinn ved utledning og analyse av en dynamisk modell:

1. Formulér de relevante dynamiske balanseligninger (hovedproblemet er ofte: Hvilken balanse? Hvilket kontrollvolum?)
2. Bruk stasjonære data (fra det nominelle driftspunkt) til å bestemme eventuelle manglende parametere i ligningene.
3. Lineariser og analysér modellen.
4. Bestem responsen ved å løse de dynamiske ligningene (“dynamisk simulering”).
5. Modellen kan for eksempel brukes til å stille inn en PID-regulator.