Litt om retninger til poler og nullpunkt

1 Innledning

I multivariable system har alt retninger; forsterkninger (gitt ved singulærverdier), poler og nullpunkt. Disse forskjellige retningene er generelt ikke avhengige av hverandre. Det vil her taes opp hva disse retningene er, og hvordan de kan finnes ved Matlab.

Systemet vi vil se på er generelt gitt enten på tilstandsromform som

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

eller på transfermatriseform

$$y = G(s)u$$

Spesielt vil vi se på systemet

$$G(s) = \frac{1}{s+2}\begin{bmatrix} s-1 & 4 \\ 4.5 & 2(s-1) \end{bmatrix}$$

og vise hvordan en finner systemets nullpunkt- og polretninger i Matlab.

Systemet defineres i Matlab med

```
g11 = nd2sys([1 -1], [1 2]);
g12 = nd2sys([1], [1 2],4);
g21 = nd2sys([1], [1 2],4.5);
g22 = nd2sys([1 -1], [1 2],2);

G_u = sbs(abv(g11,g21),abv(g12,g22)); % non-minimal realization has 4 states
G = sysbal(G_u);                      % minimal realization has 1 state
```

2 Forsterkninger

Vi finner et systems forsterkninger og tilhørende retninger ved en bestemt frekvens $\omega^\star$ ved singulærverdidekomposisjon:

$$G(j\omega^\star) \triangleq G = U\Sigma V^H$$

hvor Σ er en diagonal matrise med samme dimensjon som G, med singulærverdiene på diagonalen. Disse er gitt ved

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^H G)}$$

Matrisene U og V er egenvektormatriser til henholdsvis GG^H og $G^H G$, som sees fra $G^H G = V\Sigma^H U^H U\Sigma V^H = V\Sigma^H\Sigma V^H$ og $GG^H = U\Sigma V^H V\Sigma^H U^H = U\Sigma^H\Sigma U^H$. Merk at dette ikke gjelder motsatt, at alle egenvektormatriser til GG^H og $G^H G$ gir singulærverdidekomposisjonen. Dette kommer av at en ikke kan velge U og V uavhengig av hverandre, siden en for hver egenvektor har et valg av "fortegn" (om v er en normalisert egenvektor, er også $e^{j\alpha}v$ en normalisert egenvektor). For eksempel, om G er kvadratisk og har full rang, og V er en egenvektormatrise til G^HG, kan U finnes som

$$U = GV\sqrt{\Sigma^{-1}}$$

Kolonnevektorene i V er inngangsretninger; og kolonnevektorene i U er utgangsretninger, som vi ser av

$$Gv_i = \sigma_i u_i$$

I Matlab finnes U, V og Σ ved kommandoen svd.

3 Nullpunkt

Nullpunkt er definert som de $s = z_i$ som gjør at $G(s)$ mister rang. Dette er det samme som at $G(z_i)$ har et ikke-trivielt nullrom, altså finnes det inngangsvektorer u_z som gjør utgangen lik 0:

$$y = G(z_i)u_z = 0$$

Inngangsretningen(e) til dette nullpunktet (inngangsnullretning) består av basisvektorene i dette nullrommet.

Siden $G(z_i)$ ikke har full rang, vil også $G^H(z_i)$ ha et ikke-trivielt nullrom. Dette nullrommet (det venstre nullrommet til $G(z_i)$) er utspent av utgangsretningene til dette nullpunktet:

$$G^H(z_i)y_z = 0 \Rightarrow y_z^H G(z_i) = 0 \tag{1}$$

Disse retningene kan finnes ved singulærverdidekomposisjon som ved forsterkningsretningene, men dette er ikke anbefalt (pga. problemer ved flere nullpunkt i samme punkt):

```
z  = szeros(G);      % nullpunkt
Gg = vunpck(frsp(G,-i*4.76434)); r=rank(Gg); % r is Normal rank of G
Gz = frsp(G,-i*z); [u,s,v]=vsvd(Gz);
yz = sel(u,':',r);  % Output zero direction is [-0.8321 0.5547]'
uz = sel(v,':',r);  % Input  zero direction is [-0.8    0.6   ]'
```

Disse nullpunktene og retningene finnes vanligvis numerisk fra en tilstandsrombeskrivelse av systemet. Vi kan skrive tilstandsrommodellen på formen

$$P(s)\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

hvor

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Om vi skal ha et nullpunkt i $s = z_i$, dvs. $y = 0$ uten at u (og x) er null, så må $P(z_i)$ miste rang. Vi ser at dette er det samme som å løse det generaliserte egenverdiproblemet

$$(zI_g - M)\begin{bmatrix} x_z \\ u_z \end{bmatrix} = 0$$

hvor

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \; ; \; I_g = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som løses med matlab-funksjonen eig. Dette gir n_x egenverdier (nullpunkt) og tilhørende egenvektorer.

Inngangspolretningene er u_z i egenvektoren(e) tilhørende nullpunktet.

Fra (1) ser vi at utgangspolretningen er den inngangen som gjør at utgangen av det transponerte systemet blir 0. Denne finnes fra løsningen av

$$\begin{bmatrix} x_z^H & y_z^H \end{bmatrix} (zI_g - M) = 0$$

som kan skrives

$$(zI_g - M^T) \begin{bmatrix} \overline{x}_z \\ \overline{y}_z \end{bmatrix} = 0$$

hvor $\overline{y}_z$ er kompleks konjugert av utgangsnullpunktretningen y_z.

Merk at alt dette gjelder for system med like mange innganger som utganger. Om dette ikke er tilfelle, må man være "smart" (gjøre systemet kvadratisk ved å utvide M slik at en er sikker på at en ikke innfører flere nullpunkt).

I Matlab kan nullpunkt og deres retninger finnes ved:

```
[mtype,ny,nu,nx] = minfo(G);
M = sys2pss(G);              % State space matrix
Ig = zeros(nx+nu,nx+nu);
Ig(1:nx,1:nx) = eye(nx);     % Define Ig
[vec, z] = eig(M, Ig);       % Find generalized eigenvalues (and -vectors)
z = z(1,1);                  % Disregard the two zeros at infinity
izd = vec(nx+1:nx+nu,1);     % Get input zero direction
izd = izd/norm(izd);         % Normalize length of directions; if first
                             % element is complex this should also be
                             % normalized to be real
```

for inngangsretning, og for utgangsretning:

```
[vec, z] = eig(M', Ig);      % Find generalized eigenvalues (and -vectors)
z = z(1,1);                  % Disregard the two zeros at infinity
ozd = vec(nx+1:nx+nu,1);     % Get input zero direction
ozd = ozd/norm(ozd);         % Normalize length of directions; if first
                             % element is complex this should also be
                             % normalized to be real
```

4 Poler

Poler er definert som egenverdiene til A-matrisen, og finnes numerisk som disse.

Om systemet har en pol i $s = p$, kan vi finne inngangspolretning og utgangspolretning ved singulærverdikomposisjon av $G(p)$, $G(p) = U\Sigma V^H$. Vi kan da skrive

$$G(p)u_p = \infty \; , \; y_p^H G(p) = \infty$$

I Matlab kan dette gjøres slik:

```
p=spoles(G)         % one stable   (LHP) pole at p = -2
pp = p*(1+1.e-4);  % move the pole a little away before evaluating G(p)
Gp = frsp(G,-1*pp);% Note that G(i*w)=frsp(w), so G(p) = G(i*-i*p)=frsp(-i*p)
[u,s,v]=vsvd(Gp);  % Take SVD of G(p)
yp = sel(u,':',1)  % Output pole direction is [0.5547  -0.8321]'
up = sel(v,':',1)  % Input  pole direction is [0.6     -0.8   ]'
```

Men siden vi har at $G(p)$ er uendelig, medfører dette numeriske problemer. Vi har også problemer ved multiple poler i samme punkt.

La t og q være henholdsvis høyre og venstre egenvektor til A;

$$At = pt \; ; \; q^H A = pq^H$$

Da er polretningene gitt ved

$$y_p = Ct \; ; \; u_p = B^T q$$

Utgangspolretningen sees ved å sette inn $x = t$ i systemligningene; da får vi

$$st = At + Bu = pt + Bu \Rightarrow t = \frac{1}{s-p} Bu$$

Vi ser at når vi er i polpunktet blir $t = \infty$, og utgangen som blir uendelig er $y_p = Ct$.

For å finne inngangspolretningen, ser vi på det transponerte systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^T x + C^T y \\ u &= B^T x + D^T y \end{aligned}$$

og får inngangspolretningen på samme måte som utgangspolretningen.

I Matlab finnes disse retningene ved

```
[A,B,C,D]=unpck(G);
[T,P] = eig(A);  opd = C*T;      % associated pole output vectors
opdn = opd / norm(opd);          %   normalize to get pole output directions
[Q,P] = eig(A'); ipd = B'*Q;     % associated pole input vectors
ipdn= ipd / norm(ipd);           %   normalize to get pole input directions
```